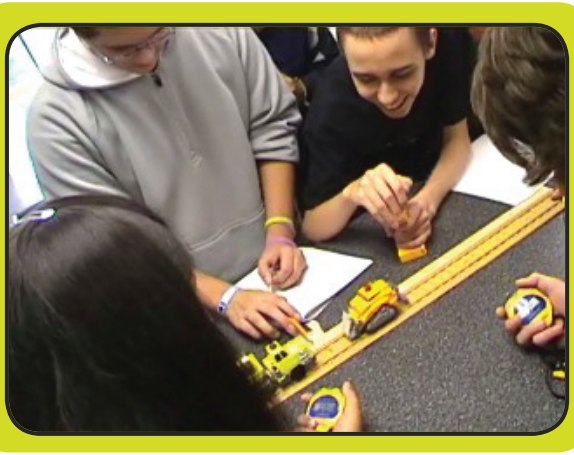
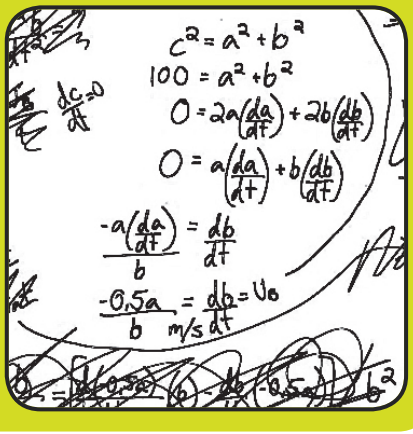
Processus d'abstraction en mathématiques

Repères pratiques et conceptuels





Luis Radford
Serge Demers
Isaias Miranda

Processus d'abstraction en mathématiques

Luis Radford, Serge Demers et Isaias Miranda

Ce livre provient d'un programme de recherche intitulé *Le passage à l'abstrait dans l'apprentissage des mathématiques au cycle intermédiaire (de la 7e à la 10e année)*.

Ce livre et un DVD d'accompagnement sont offerts aux conseils scolaires de langue française de l'Ontario.

Équipe consultative du ministère de l'Éducation de l'Ontario :
Saveria Caruso
Jacques Théorêt
Suzanne Séguin

Rédaction	:	Luis Radford, Serge Demers et Isaias Miranda École des sciences de l'éducation Université Laurentienne
Collaboration	:	Tammy Cantin, École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls (Conseil scolaire de district catholique Franco-Nord) Lesly Dorcé, Collège français de Toronto, Toronto (Conseil scolaire de district du Centre-Sud-Ouest) Alain Girouard, École Alliance St-Joseph, Chelmsford (Conseil scolaire de district catholique du Nouvel-Ontario) Yassir Hicham, Collège français de Toronto, Toronto (Conseil scolaire de district du Centre-Sud-Ouest) Gilbert Lacroix, École secondaire MacDonald-Cartier, Sudbury (Conseil scolaire public du Grand Nord de l'Ontario) Richard Marceau, École secondaire MacDonald-Cartier, Sudbury (Conseil scolaire public du Grand Nord de l'Ontario) Rita Venne-Beaudry, École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls (Conseil scolaire de district catholique Franco-Nord)
Assistantes et assistants de recherche	:	Heather Empey, Emilie Fielding, Sonia Gonçalves, Monique Grenier, Isaias Miranda, Luc Richier, Andrew Sanderson, Kayla Thomas
Révision linguistique	:	Nathalie Ritchie
Couverture	:	Mélissa Le Blanc, CFORP
Mise en pages	:	Lison Lauriault, CFORP
Impression	:	Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques 435, rue Donald, Ottawa ON K1K 4X5 Commandes : Tél. : 613 747-1553 Téléc. : 613 747-0866 Site Web : www.librairieducentre.com Courriel : commandes@librairieducentre.com

Ce projet a été rendu possible grâce à une aide financière du ministère de l'Éducation, soit la Direction des politiques et programmes d'éducation en langue française et à une subvention du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH/SSHRC). Nous tenons à remercier le Conseil scolaire catholique du Nouvel-Ontario (conseil hôte) ainsi que les conseils scolaires de langue française de la province de l'Ontario qui ont participé au projet :

- Conseil scolaire catholique Franco-Nord;
- Conseil scolaire de district du Centre-Sud-Ouest;
- Conseil scolaire public du Grand Nord de l'Ontario

L'apport financier du ministère de l'Éducation ne doit pas être perçu comme une approbation ministérielle pour l'utilisation du matériel produit. Cette publication n'engage que l'opinion de ses auteurs, laquelle ne représente pas nécessairement celle du Ministère.

© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario et Université Laurentienne, 2009

Tous droits réservés.

Permission accordée cependant à l'enseignant ou à l'enseignante de reproduire ce document pour utilisation en salle de classe ou pour des séances de formation, pourvu que la source et le nom des auteurs soient clairement indiqués.

ISBN 978-1-4435-0683-0
Dépôt légal — troisième trimestre 2009
Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada Printed in Canada

Les auteurs

Luis Radford est professeur titulaire à l'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne de Sudbury, Ontario. Subventionnée depuis 1998 par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH/SSHRC), sa recherche porte sur le développement de la pensée mathématique des élèves et sur le rapport entre pensée et culture. Luis Radford est l'auteur de plus de 150 articles scientifiques. En 2005, il a reçu le prix d'excellence en recherche de l'Université Laurentienne. Actuellement, il est éditeur associé des revues internationales *Educational Studies in Mathematics*, *For the Learning of Mathematics* et *Mathesis*. Il est membre du comité de lecture de plusieurs journaux internationaux dont *Revue des sciences de l'éducation, Recherches en didactique des mathématiques, Mathematical Thinking and Learning, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, La Matematica e la sua didattica*, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, Acta Didactica Universitatis Comenianae* et *International Journal for Mathematics in Education of the Hellenic Mathematics Society.*

Serge Demers est professeur associé à l'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne de Sudbury, Ontario. Il a été directeur de l'École de 2005 à 2008, ainsi que membre fondateur du Conseil ontarien de recherche en éducation. Ses domaines de recherche incluent l'analyse statistique ainsi que l'enseignement des mathématiques et des sciences à l'élémentaire et au secondaire.

Isaias Miranda est professeur à l'Instituto Politecnico National de México. Ses travaux de recherche portent sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, en particulier sur les problèmes que posent les représentations graphiques concernant le mouvement d'objets. Il a effectué un séjour doctoral au Laboratoire de sémiotique culturelle et pensée mathématique de l'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne durant la période 2005-2007.

Table des matières

Introduction **7**

Chapitre 1 : Processus d'abstraction en mathématiques **9**

Chapitre 2 : Les actions didactiques qui favorisent les processus d'abstraction **19**

Chapitre 3 : Introduction aux méthodes algébriques de résolution d'équations **29**

Chapitre 4 : Interprétation et production de graphiques **45**

Chapitre 5 : Les détectives et les suspects : un problème de modélisation mathématique **67**

Chapitre 6 : Des véhicules qui s'éloignent et des véhicules qui se rapprochent : le rôle des outils mathématiques dans la modélisation **85**

Annexes **109**

Activités du chapitre 3 111

Activités du chapitre 4 129

Activités du chapitre 5 153

Activités du chapitre 6 173

Introduction

Le but de ce livre est de présenter quelques idées pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il porte sur un des mécanismes cognitifs les plus importants dans la formation des concepts mathématiques, celui de l'abstraction.

L'abstraction est ce qui nous permet d'aller au-delà de quelques cas particuliers vers quelque chose de plus général. Par exemple, c'est grâce à l'abstraction que nous pouvons aller au-delà d'un, deux ou trois triangles particuliers et d'en arriver à l'idée générale de triangle.

L'abstraction a fait l'objet de réflexions soutenues depuis Aristote; plusieurs idées et théories ont été développées à ce sujet. Malgré leurs différences conceptuelles, ces idées et théories s'entendent sur un point : l'abstraction que fait un élève n'est pas un acte instantané. L'abstraction est un *processus*. Au cours de ce processus, l'élève mobilise des idées déjà acquises et arrive, à l'aide du langage, de symboles et d'artefacts culturels, à faire des liens qu'il ne faisait pas auparavant et à constituer ainsi une nouvelle idée.

Du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, la question est de déterminer les actions didactiques qui permettent aux élèves de s'engager dans des processus d'abstraction.

Ce livre veut apporter quelques éléments de réponse à cette question.

Dans les deux premiers chapitres, nous présentons un cadre conceptuel qui permet de rendre opérationnel le concept d'abstraction. Nous discutons, à la lumière des recherches récentes en psychologie, neuroscience et didactique des mathématiques, des caractéristiques qu'une leçon modèle doit présenter afin de faciliter l'engagement de l'élève dans les processus d'abstraction.

Les chapitres 3 à 6 présentent des exemples concrets de leçons modèles. Ces leçons peuvent être facilement adaptées à différents niveaux du cycle intermédiaire. Ainsi, même si nous présentons l'analyse d'une leçon modèle mise à l'essai dans une classe de 8e année, elle peut être adaptée et utilisée dans une classe de 9e année, et vice-versa.

Les leçons que nous avons élaborées et mises à l'essai sont articulées en séquences d'enseignement de difficulté conceptuelle graduelle. Nous avons appelé *unité conceptuelle* cette organisation progressive des leçons. L'unité conceptuelle est le fil conducteur didactique qui trace le trajet de l'élève vers l'abstraction mathématique.

Les feuilles de route des leçons se trouvent en annexe. Ces feuilles peuvent être utilisées en salle de classe et modifiées selon les besoins de l'enseignante ou de l'enseignant.

Notre livre est le résultat d'un projet de recherche-action qui s'est déroulé de novembre 2006 à juillet 2008 et auquel ont participé cinq enseignantes et enseignants de différents points de la province, ainsi que plusieurs consultants, conseillers, conseillers pédagogiques et assistantes et assistants de recherche. Notre équipe de recherche-action a élaboré les séquences d'enseignement lors des rencontres tenues à l'École des sciences de l'éducation de l'Université Laurentienne. Nous avons par la suite filmé ces leçons dans des salles de classe et procédé à une analyse des données.

Le chapitre 5 a été rédigé par Isaías Miranda; le chapitre 6 a été rédigé par Serge Demers. Les autres chapitres ont été rédigés par Luis Radford.

Nous voulons remercier toutes les personnes qui ont rendu possible ce projet. En particulier, nous voudrions remercier le ministère de l'Éducation de l'Ontario et les agents d'éducation, Saveria Caruso et Jacques Théorêt, qui ont fait le suivi du projet. Nous voudrions aussi remercier le conseil hôte — le Conseil scolaire catholique du Nouvel-Ontario — et le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

Un remerciement très particulier aux conseils scolaires de langue française qui ont participé à notre projet de recherche, aux écoles, aux enseignantes et enseignants qui ont travaillé avec nous et surtout aux élèves, qui nous ont appris ce que nous savons maintenant sur l'abstraction.

Les auteurs.
Juillet 2009.

CHAPITRE 1

Processus d'abstraction en mathématiques

L'abstraction est l'un des processus cognitifs les plus élémentaires. Pourtant, quand il s'agit des mathématiques, l'abstraction peut devenir très difficile. C'est ce qu'on voit, jour après jour, dans la salle de classe. Pourquoi l'abstraction devient-elle difficile? En quoi exactement consiste-t-elle? Que peut-on faire pour aider les élèves à s'engager dans des processus d'abstraction et faciliter ainsi leur apprentissage?

Nous aborderons ces questions dans ce chapitre. Les concepts qui seront présentés et discutés ici serviront de base aux chapitres suivants.

L'abstraction en tant que processus élémentaire cognitif

Essayons d'imaginer un moment ce que serait notre monde si, pour une raison quelconque, nous n'arrivions plus à faire des abstractions. Nous ne serions plus en mesure de distinguer ce qui rend un objet différent d'un autre. Par exemple, nous ne pourrions pas distinguer une banane d'un tournevis. Reconnaître des objets similaires et former un concept par *abstraction*, à partir de ce qui leur est commun et différent, est un processus cognitif élémentaire. C'est un processus qui n'est pas réservé seulement à l'humain. On sait, par exemple, qu'il est à la portée des chimpanzés.

En effet, dans une recherche menée par Savage-Rumbaugh, Rumbaugh, Smith et Lawson, des chimpanzés ont été entraînés à distinguer entre deux types d'objets : des articles comestibles (bananes, pain, etc.) et des articles non comestibles (tournevis, règle, clés, etc.). À la suite de cet entraînement, les chimpanzés ont pu classifier de *nouveaux* objets d'apparence très différente selon ces deux catégories (voir Figure 1).

Figure 1. Classification, sans erreurs, effectuée par un chimpanzé consistant à classer 5 objets comestibles et 5 objets non comestibles lors d'un test mené par Sue Savage-Rumbaugh et ses collaborateurs (1980, p. 923).

Pour classifier les nouveaux objets, ces chimpanzés ont accompli une *abstraction*. Celle-ci leur a permis de *distinguer* les objets comestibles de ceux non comestibles. À la base de cette abstraction se trouve une capacité

cognitive élémentaire, partagée par plusieurs primates, sans laquelle nous, les humains, rentrerions dans une quincaillerie en cherchant un restaurant![1]

L'abstraction mathématique est relationnelle

On peut apprendre une quantité importante de faits, mais si on n'arrive pas à les lier entre eux, à saisir ce qu'ils ont en commun, bref, à former un concept les liant, on ne pourra pas passer à un niveau conceptuel supérieur. Dans son livre, *Extraordinary People: Understanding Savant Syndrome*, Donald A. Treffert raconte le cas de plusieurs individus qui sont capables d'effectuer très rapidement des multiplications de nombres à 2 ou 3 chiffres, et de trouver la racine carrée de nombres assez grands, sans pour autant pouvoir expliquer leur procédure.

Ces personnes, appelées souvent des « calculateurs instantanés », accomplissent ces exploits par cœur, sans un sens mathématique de ce qu'ils font.

Ces démarches impressionnantes seraient une façon de compenser l'impossibilité à penser abstraitement. Par exemple, un enfant de cinq ans, qui avait une capacité extraordinaire pour effectuer des multiplications rapides, ne pouvait pas comprendre ou utiliser le langage de façon conceptuelle; il ne pouvait pas comprendre les définitions de mots ou utiliser des métaphores dans un sens abstrait. « Son langage, dit Treffert, était limité à des réponses concrètes, déterminées contextuellement; des réponses mécaniques d'un type automatique. »[2]

Ce qui est à la base de l'abstraction est la formation d'un *concept* (c'est-à-dire une *entité générale*) qui permet de regrouper les objets selon un élément commun. Ce concept apparaît en tant que résultat d'un processus qui fait *abstraction* de beaucoup de choses : la couleur, la taille, la forme, etc. Pourtant, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, les abstractions mathématiques semblent souvent difficiles à accomplir. On peut se poser la question : pourquoi? Pourquoi les abstractions mathématiques semblent-elles poser autant de difficultés aux élèves alors que, chez l'humain ayant un développement normal du cerveau, l'abstraction semble être un mécanisme cognitif élémentaire?

Les abstractions mathématiques partent d'une expérience sensorielle concrète qui peut être similaire à celle qui rend possible aux chimpanzés la formation de concepts élémentaires comme « comestible » et « non comestible ». Mais les abstractions mathématiques vont vite porter non pas sur des objets concrets, mais sur des symboles les représentant. De plus, ces abstractions, représentées par des symboles, vont se concaténer entre elles, donnant ainsi lieu à d'autres abstractions, et ainsi de suite.

[1] Pour plus de renseignements sur la capacité d'abstraction chez les chimpanzés, nous renvoyons la lectrice ou le lecteur au document vidéo *Introduction aux idées du livre* dans le DVD d'accompagnement, en particulier aux passages qui montrent le concept de numérosité chez le chimpanzé AI.

[2] Treffert, 1990, p. 178-179. Une bibliographie se trouve à la fin du chapitre.

Voyons deux exemples qui illustrent ces idées.

Exemple 1 : l'addition

L'introduction, en deuxième année, de l'addition de deux nombres à deux chiffres, se fait non pas à partir d'objets concrets, mais à partir de *symboles*.

Par exemple, quand on demande à un élève d'effectuer 16 + 28, on ne fait plus référence à l'action concrète de mettre ensemble 16 blocs et 28 blocs, mais à une action sur des symboles (les symboles « 16 » et « 28 »). Pour effectuer l'addition, l'élève doit pouvoir mettre en relation les symboles et leurs significations (p. ex., 2 signifie deux dizaines, 6 signifie 6 unités, etc.). Bref, l'abstraction mathématique est une concaténation d'abstractions exprimée sous forme de symboles (voir Figure 2).

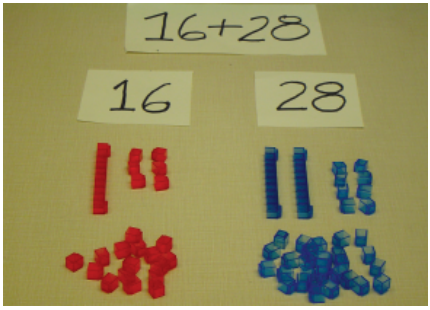


Figure 2. Une addition aussi simple que « 16 + 28 » repose sur plusieurs niveaux de conceptualisation. Dans un premier niveau, on a des objets concrets à additionner. Au niveau 2, on a un arrangement des mêmes objets concrets en concepts (« dizaines », « unités »). Au niveau 3, on a des *symboles* qui représentent les objets à additionner. Les symboles « 16 » et « 28 » sont les symboles de deux abstractions. Enfin, ces symboles se concatènent pour exprimer l'action d'additionner. Ce qu'on additionne ici ce n'est plus les objets, mais les symboles du niveau 3.

Les propos précédents peuvent être résumés comme suit : l'abstraction mathématique repose sur l'utilisation de symboles qui expriment des relations de plus en plus complexes. Accéder à des niveaux supérieurs d'abstraction (comme celui montré dans la Figure 2) demande à l'élève de comprendre les significations auxquelles renvoient les nouveaux symboles (par exemple, comment opérer les symboles « 16 » et « 28 ») et de *revenir aux significations préalables* lorsque nécessaire (le symbole « 16 » signifie une dizaine et six unités, mais aussi seize unités, etc.).

Exemple 2 : les patrons

Nous venons de dire que le moteur de l'abstraction est cette capacité à saisir les similarités et les différences à la base de la formation de concepts et à représenter cette abstraction par un symbole. Dans l'exemple précédent, le symbole « 6 » ne représente pas seulement les six blocs montrés ci-dessus, mais n'importe quel groupement de six objets indépendamment de leur nature, taille, couleur, poids, etc. On peut imaginer à quel point il serait difficile d'effectuer des calculs, si on devait utiliser des symboles différents selon qu'on compte six blocs, six bananes, six tournevis, etc. C'est grâce à cette abstraction et au symbole qui la représente que nous pouvons regrouper sous un même concept toutes les collections de six objets, indépendamment

de leur nature. Dans l'exemple précédent, nous avons vu que l'abstraction peut être mise en relation avec d'autres abstractions par l'intermédiaire d'autres symboles, et ainsi de suite.

L'exemple suivant aidera à clarifier cette idée. Il s'agit d'un exemple portant sur le domaine de modélisation et algèbre, tiré d'une classe de 2e.

Nous avons donné aux élèves la suite suivante :

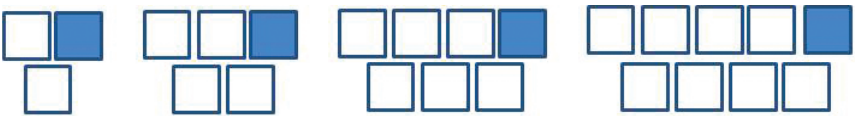
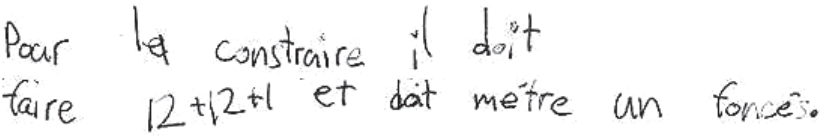


Figure 1 2 3 4

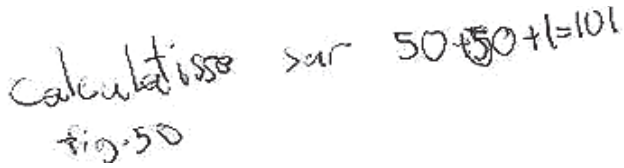
Dans la première partie de l'activité, en faisant des dessins, les élèves ont prolongé la suite jusqu'à la Figure 6. Ensuite, les questions ont porté sur un enfant factice, Mathieu, à qui les élèves devaient expliquer ce qu'il devait faire pour construire les Figures 8, 12 et 25.

Naturellement, pour répondre à ces questions, les élèves devaient d'abord distinguer ce qu'il y a de commun et de différent entre ces figures, afin de former le *concept* (ici une structure mathématique) qui correspond aux figures de la suite. Avec l'aide de l'enseignante, les élèves ont *imaginé* les éléments de la suite comme éléments divisés en deux rangées, l'une au bas, l'autre au haut, celle au haut ayant un rectangle foncé à la fin. Ils ont dégagé une similarité : le nombre de la figure coïncide avec le nombre de carrés pâles dans la rangée au bas et dans la rangée au haut : la Figure 1 a un carré pâle au bas, un carré pâle au haut et un carré foncé; la Figure 2 a deux carrés au bas, deux carrés pâles au haut et un foncé, etc.

En se référant à la Figure 12, Carl, un des élèves de cette classe de 2e année, a écrit :


Pour la constraire il doit
faire 12+12+1 et doit metre un foncés.

Les élèves ont accompli ici une première abstraction. Cette abstraction leur a permis de trouver le nombre de carrés dans d'autres figures comme la Figure 25 ou 50. Ainsi, pour répondre à la question suivante : « Pierre veut construire une grosse figure de la suite. Explique-lui ce qu'il doit faire », certains élèves ont pris la Figure 50. C'est le cas de Carl. Bien sûr, calculer le nombre total est une tâche difficile à ce stade; donc, Carl a suggéré d'utiliser la calculatrice :



Comme dans l'exemple précédent, l'abstraction s'exprime ici à l'aide d'un symbole « 50 + 50 + 1 = 101 ». Ce symbole est constitué d'autres symboles : « 50 », « 1 », « 101 ». On voit par là, encore une fois, la dynamique de concaténation de l'abstraction mathématique mentionnée ci-dessus.

Or, dans cette activité, nous voulions amener les élèves à faire face à une situation encore plus abstraite. Nous voulions que les élèves généralisent la procédure à une situation dans laquelle le nombre à calculer reste *indéterminé* (c'est-à-dire un nombre qui n'est pas 12, 25, 50 ou un autre nombre *particulier*, même s'il est grand).

Nous avons donc inventé l'histoire suivante, présentée sous forme de problème défi, dans laquelle les élèves devaient écrire un message :

> Voici une boîte contenant des billets marqués chacun d'un nombre : 100, 101, 102, 103, etc.
>
> Nous allons prendre au hasard un billet de la boîte. Le nombre sur le billet va représenter le nombre d'une figure de la suite.
>
> Nous allons mettre le billet dans une enveloppe et l'envoyer à Tristan, un élève d'une autre classe de 2e année qui n'a jamais vu cette suite.
>
> Écris un message à cet élève en lui expliquant clairement ce qu'il faut qu'il fasse pour qu'en regardant le nombre dans l'enveloppe il puisse calculer rapidement le nombre de rectangles qu'il y aura dans cette figure.

Les élèves ont travaillé en petits groupes. Comme il a été prévu, plusieurs élèves ont donné une explication à l'aide d'un exemple. Voici l'extrait d'une discussion entre les élèves du petit groupe de Carl et l'enseignante. Les élèves sont Carl, Zia et Émilie :

1. **Zia :** Si tu as la figure 50, tu dois faire 50 en bas, 50 en haut, plus 1 foncé.
2. **Enseignante :** Oui, oui. Alors ça, c'est un bon exemple. Mais, s'il a la figure 100?
3. **Carl :** 100 plus 100 plus 1 (…)
4. **Émilie :** Comme c'est, c'est le numéro, comme…
5. **Enseignante :** Oh! Qu'est-ce que tu dis?

6. **Émilie :** C'est le numéro qu'il a, le même numéro en bas, le même numéro en haut, plus 1.
7. **Enseignante :** Excellent!

À la ligne 6, Émilie offre une explication qui ne porte pas sur un nombre particulier, mais sur un nombre général, un nombre *quelconque*, exprimé ici par « le numéro », qui veut dire le numéro tiré de la boîte. C'est un formidable pas vers l'abstraction. Toutefois, l'explication demeure encore imprégnée de l'aspect géométrique des figures de la séquence. En fait, à y voir de près, on se rend compte qu'Émilie propose le processus de *construction* de la figure, alors que la question porte sur les *calculs* à faire (Émilie parle encore du haut et du bas de la figure). L'enseignante invite donc les élèves à aller encore plus loin :

8. **Enseignante :** Ça, c'est excellent. Mais n'oublie pas : il [l'élève de 2e année qui tirera le billet de la boîte] n'a pas besoin de dessiner la figure… Alors, comment est-ce qu'on pourrait faire pour qu'il additionne tout ça …?
9. **Carl :** Peut-être, il pourrait comme prendre les deux, le… un 100 et l'autre 100, et après faire comme 200 plus 1, qui égale à 201.
10. **Enseignante :** C'est un bon exemple concret, sauf que s'il ne [tire] pas de 100 [de la boîte]; supposons qu'il tire un autre numéro…?
11. **Zia :** Ouien
12. **Émilie :** Oui…
13. **Enseignante :** C'est pour ça que j'aimais l'autre idée d'Émilie qui disait : tu prends le numéro, puis…, (*en s'adressant à Émilie*) qu'est-ce que tu fais avec le numéro que t'as?
14. **Émilie :** […] On peut utiliser notre calculatrice pour calculer.
15. **Enseignante :** Ok, puis qu'est-ce qu'il va faire avec la calculatrice?
16. **Émilie :** Il va mettre le numéro.
17. **Zia :** Il va faire le numéro.
18. **Émilie :** Plus le même numéro, plus 1.
19. **Enseignante :** Awww! Qu'est-ce que vous pensez de ça?
20. **Carl :** Oui!

Les élèves ont enregistré leur message à l'aide d'un magnétophone numérique, devant la classe (voir Figure 3).

L'explication d'Émilie a été la suivante :

> Allô, Tristan! Si un numéro que tu as… tu mets le même numéro en bas, le même numéro en haut, plus 1. Après tu prends la calculatrice, tu mets le numéro dessus, plus le même numéro, plus 1. Après, ça va te dire la réponse.

Figure 3. À gauche, l'enseignante montre aux élèves la boîte où seront mis les billets qui porteront un « grand » numéro chacun (comme 101, 102, etc.). À droite, Émilie et son équipe enregistrent, devant la classe, le message qui sera envoyé à un élève de 2e année. Ce message lui dit les calculs à faire pour trouver le nombre de rectangles de la figure dont la position dans la suite correspond au nombre qui sera tiré de la boîte.

On voit donc comment les élèves de 2e année arrivent à accomplir ce double passage à l'abstrait. Dans un premier temps, ils ont formulé une abstraction, en énonçant la procédure de construction générale des figures sur des cas particuliers (Figures 8, 12 et 25). Par la suite, ils ont produit encore une autre abstraction. Bien sûr, les élèves n'ont pas encore écrit une formule algébrique telle que $n + n + 1$ ou $2n + 1$, mais ils ont réussi à effectuer une généralisation algébrique, c'est-à-dire une généralisation dont la variable est exprimée par un nombre indéterminé. Cette deuxième généralisation s'appuie sur la première, montrant ainsi le caractère d'enchaînement opératoire des abstractions mathématiques.

Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons vu que, grâce à l'abstraction, l'élève fait une synthèse d'expériences vécues précédemment et s'élève à un nouveau niveau de généralité. Cette synthèse organise le similaire et le différent et donne une cohérence à la multitude des faits que l'élève rencontre dans le monde de l'expérience.

Il ne faut pas oublier que l'abstraction n'est pas un acte contemplatif. L'abstraction est un *processus* par lequel l'élève crée des liens et *exprime* son expérience à un niveau conceptuel plus riche. Justement, on peut dire qu'on a fait une *abstraction* quand on a réussi à passer à un nouveau niveau de généralité. Une abstraction repose donc sur un saut ou sur un changement conceptuel[3].

[3] Comme nos exemples le montrent, il y a une relation étroite entre abstraction et généralisation. Ainsi, dans le deuxième exemple, on *généralise* les actions accomplies sur les figures visibles (Figures 1 à 4) à d'autres figures particulières qu'on ne voit pas (comme la Figure 12). Ce ne sont pas les actions qui sont généralisées, mais les objets sur lesquels portent les actions. Or, pour effectuer cette généralisation, on doit faire une *abstraction* et traiter la Figure 12 (ou une autre figure qu'on ne voit pas) comme les figures visibles. Plus tard, dans le problème de la boîte, tant les objets auxquels s'applique la procédure que la procédure elle-même sont généralisés. La procédure de calcul porte sur un nombre général, un nombre *quelconque*, qui est une *abstration* des nombres 1, 2, ... 100, 101, etc. Quant à la procédure précédente, elle est une *abstraction* de la procédure précédente. On voit donc que, sans s'identifier l'une à l'autre, abstraction et généralisation participent activement dans l'activité mathématique.

Ce qui distingue l'abstraction mathématique d'autres formes d'abstraction, c'est la concaténation opératoire de ses abstractions. Les abstractions mathématiques, on l'a dit, s'expriment à l'aide de symboles. À leur tour, ces symboles sont mis en rapport entre eux pour former d'autres abstractions.

La question pour nous est celle de déterminer les conditions didactiques qui peuvent favoriser les processus d'abstraction en mathématiques chez nos élèves. Ce sera le thème central du chapitre suivant.

Travaux cités et lectures supplémentaires

Barth, B.-M. (1987). *L'apprentissage de l'abstraction*, Paris, Retz.

Damerow, P. (1996). *Abstraction and representation. Essays on the cultural evolution of thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Gómez, J. C. (2004). *Apes, monkeys, children, and the growth of mind*, Cambridge, Harvard University Press.

Hershkowitz, R., B. Schwarz and T. Dreyfus (2001). "Abstraction in context: Epistemic actions", *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), p. 195-222.

Kidron, I. (2008). "Abstraction and consolidation of the limit procept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks", *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), p. 197-216.

Luria, A. R., and L. S. Vygotski (1998). *Ape, primitive man, and child. Essays in the history of behavior*, Boca Raton, Fl., CRC Press LLC.

Núñez, R. (2007). "Understanding abstraction in mathematics education: Meaning, language, gesture, and the human brain", *Paper presented at the 31st Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, Fredericton, University of New Brunswick,* June 8-12.

Savage-Rumbaugh, S., and R. Lewin (1994). *Kanzi*, New York, John Wiley.

Savage-Rumbaugh, E. S., D. M. Rumbaugh, S. T. Smith and J. Lawson (1980). "Reference: The Linguistic Essential", *Science, 210*(4472), p. 922-925.

Smith, S. B. (1983). *The great mental calculators*, New York, Columbia University Press.

Tomasello, M., and J. Call (1997). *Primate cognition*, New York, Oxford University Press.

Treffert, D. A. (1990). *Extraordinary People: Understanding Savant Syndrome,* New York, Ballantine Books.

Vygotski, L. (1985). *Pensée et langage*, Paris, Messidor.

CHAPITRE 2

Les actions didactiques qui favorisent les processus d'abstraction

Nous pouvons tirer deux conclusions du chapitre précédent. D'une part, l'abstraction est un mécanisme cognitif essentiel, qui a lieu dès que nous sommes très petits. D'autre part, l'abstraction mathématique semble complexe – elle paraît même hors de la portée de plusieurs élèves.

Ces conclusions, apparemment contradictoires, s'expliquent du fait que les abstractions à la base de la pensée mathématique sont en réalité des abstractions d'autres abstractions qui, à leur tour, reposent sur d'autres abstractions.

On voit l'importance de repérer les actions didactiques qui pourraient favoriser l'engagement de l'élève dans les processus d'abstraction qui ont lieu en salle de classe. Quelles sont ces actions? De quoi dépendent-elles? Comment peuvent-elles être prises en compte dans l'élaboration de leçons modèles? Ce chapitre tente de donner des éléments de réponse à ces questions.

Les dimensions cognitives et affectives sous-jacentes à l'abstraction

On s'entend en général sur l'idée que, pour favoriser le passage à l'abstrait, il faut choisir de bonnes activités (ou tâches) mathématiques. Mais qu'est-ce qu'une *bonne* activité?

Une bonne activité doit rendre possible un engagement soutenu de l'élève. Pour comprendre en quoi consiste cet engagement soutenu, il faut distinguer deux dimensions interreliées et complémentaires :

a) la dimension affective et

b) la dimension cognitive.

Marjorie Henningsen et Maru Kay Stein, de l'Université de Pittsburgh, se sont posé la question des facteurs qui sont favorables et ceux qui sont défavorables au maintien d'un engagement soutenu de l'élève. Un des facteurs défavorables est précisément le recours à des problèmes mathématiques inappropriés (Henningsen et Stein, 1997). Une activité trop facile ou difficile ou un mauvais choix du point de vue de la motivation conduit souvent à provoquer un déclin de l'engagement de l'élève. Une bonne activité doit donc partir du savoir de l'élève et s'articuler autour des problèmes qui sont intéressants pour celui-ci. Mais cela n'est pas suffisant.[4]

Un bon problème doit solliciter en profondeur les concepts visés. C'est ici qu'intervient la dimension cognitive. Des problèmes non pertinents du point de vue cognitif peuvent inhiber l'apparition de formes de pensée sophistiquée et empêcher le passage à l'abstrait. C'est le cas de problèmes simples. Si le problème que l'enseignante ou l'enseignant donne à l'élève est trop simple, l'élève ne va pas mobiliser les concepts visés. L'élève aura recours à des concepts ou à des procédures qu'il connaît déjà ou qui sont à la portée de

[4] Ces idées sont discutées en détail dans le document *Un survol de la recherche actuelle*, sur le DVD d'accompagnement.

ses connaissances présentes. Dans ce cas, il n'y aura pas d'apprentissage à proprement parler, car rien de vraiment nouveau ne s'est produit du point de vue conceptuel. L'exemple qui suit illustre cette idée.

Un exemple : la division en 3e année

Dans une leçon en 3e année, on pose le problème qui consiste à partager 18 galettes entre trois enfants. Le concept visé est celui de la division au sens mathématique du terme.

Imaginons qu'un élève dessine trois enfants et place, l'un après l'autre, les 18 galettes (ou des marques représentant ces galettes) devant les dessins de trois enfants, comme la Figure 1 le montre.

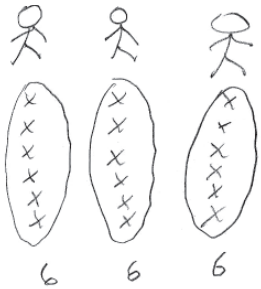


Figure 1. Algorithme personnel pour résoudre un problème de partage. L'algorithme se base sur un concept quotidien (c'est-à-dire intuitif) : l'action de partager séquentiellement des objets entre un certain nombre de personnes.

L'élève arrive certainement à la solution. Il a produit ce qu'on appelle un « algorithme personnel » : une façon *propre* de résoudre le problème. Mais cette procédure se base sur ce que le psychologue Lev Vygotski appelait *concept quotidien* — c'est-à-dire un concept basé sur des idées plus ou moins intuitives. Le concept de division mathématique (ce qu'on peut appeler, en suivant la terminologie introduite par Vygotski, le *concept scientifique*) n'a pas été mobilisé. L'élève a eu recours à des procédures intuitives déjà connues, sans apparition réelle du concept scientifique de division.

En effet, tant que l'enfant continue à résoudre des problèmes comme le précédent par des méthodes intuitives déjà connues; tant qu'il ne parvient pas à utiliser les faits numériques de la multiplication et à se rendre compte qu'il y a une multiplication derrière la solution du problème, *il n'y aura pas d'apprentissage*.[5]

Dans la section qui suit nous verrons comment l'idée d'« unité conceptuelle » peut aider l'enseignante ou l'enseignant à appuyer l'élève dans son cheminement conceptuel.

[5] Les dangers qui entourent une mauvaise application pédagogique du concept d'algorithme personnel sont discutés dans le clip vidéo *Apprentissage et zone proximale de développement* sur le DVD d'accompagnement.

L'unité conceptuelle

Continuons notre réflexion sur le problème de la division en 3e année.

Remarquons que, pour l'enseignante ou l'enseignant, il n'est pas question de rejeter l'algorithme personnel de l'élève. L'algorithme personnel a un sens pour l'élève qui l'a produit. Le travail d'enseignement consiste précisément à partir de cet algorithme personnel pour le faire évoluer vers le concept scientifique visé. Comme nous l'avons déjà dit, se contenter de l'algorithme personnel (si celui-ci ne présente pas encore le niveau d'abstraction et de systématicité du concept scientifique visé) revient simplement à abandonner l'entreprise d'apprentissage.

Or, si l'algorithme personnel n'aboutit pas à mobiliser le concept scientifique visé, que peut faire l'enseignante ou l'enseignant?

Il est clair que l'élève ne doit pas se limiter à résoudre quelques problèmes de partage de difficulté égale. L'enseignante ou l'enseignant pourrait donc présenter une situation qui serait constituée de problèmes à difficulté croissante. Pour arriver au concept scientifique visé, il faut que l'élève prenne conscience que le problème peut se résoudre à l'aide d'une procédure multiplicative. De plus, il faut que la procédure multiplicative qui a fonctionné pour résoudre le problème des galettes soit généralisée à d'autres problèmes similaires (p. ex., diviser 24 crayons entre 6 élèves, puis 24 crayons entre 5 élèves) pour arriver, enfin, à une abstraction : les problèmes du type partage reviennent à trouver combien de fois va un nombre dans un nombre donné (le nombre d'enfants ou autres) pour arriver au nombre total (le nombre de galettes, dans notre exemple).

On voit donc, dans ce court exemple, qu'il est important de considérer la gradation du niveau de profondeur des problèmes à donner aux élèves. Il ne suffit pas de donner aux élèves une question ou un problème pour assurer le passage à l'abstrait. En général, le passage à l'abstrait va exiger une transition progressive au cours de laquelle l'élève répond à une série de problèmes de difficulté graduelle.[6]

Cette organisation progressive de l'activité en questions de plus en plus difficiles, c'est ce que nous appelons *unité conceptuelle*; elle est un élément clé dans la création des conditions qui favorisent le passage à l'abstrait.

Les propos précédents peuvent donc être résumés comme suit. Pour amener les élèves à de nouveaux niveaux d'abstraction, il faut considérer la dimension affective (la motivation) et la dimension cognitive. En ce qui a trait à cette dernière, nous avons vu la pertinence d'organiser les problèmes autour d'une unité conceptuelle qui assure la progression croissante des niveaux de difficulté des problèmes en question.

[6] On l'a vu dans l'exemple mentionné au chapitre précédent. Pour amener les élèves de 2e année à des niveaux d'abstraction élevés, nous leur avons posé plusieurs questions : continuer quelques éléments de la suite en les dessinant; étudier des termes relativement éloignés (comme la Figure 12 et la Figure 25); expliquer les procédures de construction de ces figures et le calcul de rectangles dans chacune d'elles, etc.

L'interaction en salle de classe

Le choix d'une bonne activité, basée sur une unité conceptuelle appropriée, n'est pas encore suffisant pour assurer un bon apprentissage et le passage à l'abstrait. L'exemple tiré de la 2e année montre l'importance du travail en petits groupes. L'échange d'idées entre élèves et entre les élèves et l'enseignante ou l'enseignant est en fait crucial.

Tel que nous le concevons ici, le rôle de l'interaction est vu dans une optique de coopération, non seulement pour enrichir le savoir personnel, mais (et surtout) pour tisser des liens de solidarité et de compréhension avec les autres[7].

L'organisation de l'interaction suit les méthodes que nous avons élaborées précédemment (Radford et Demers, 2004). Nous suggérons des périodes de travail en petits groupes (2 à 4 élèves) au cours desquelles les élèves discutent des meilleures méthodes pour résoudre les problèmes donnés, suivies d'une discussion générale (c'est-à-dire discussion en groupe-classe) dirigée par l'enseignante ou l'enseignant.

Pour que cette méthodologie fonctionne, il faut, toutefois, que l'élève comprenne qu'il a une responsabilité envers ses compagnons de groupe, responsabilité qui, entre autres, l'empêche de laisser les autres faire le travail à sa place. Cette responsabilité est à la base de ce qui est le sentiment d'appartenance à une communauté. Elle ne va pas de soi. Elle s'apprend (Radford, 2006, 2008).

Quel est le rôle de l'enseignante et de l'enseignant au cours de l'interaction avec ses élèves? Dans plusieurs courants contemporains, l'enseignante et l'enseignant sont vus comme des *facilitateurs*. Dans notre perspective, l'enseignante et l'enseignant sont plus que cela : ils sont les *partenaires* des élèves.

Mais cela ne veut pas dire que l'enseignante ou l'enseignant fait le travail à la place des élèves et que ceux-ci sont relégués au rôle de contemplateurs.

Les élèves travaillent en petits groupes et essaient d'aller aussi loin que possible dans leur recherche de solutions aux problèmes proposés. Ils génèrent probablement des algorithmes personnels ou des idées basées sur des concepts quotidiens (c'est-à-dire intuitifs) ou même scientifiques. Il se peut, toutefois, que les procédures ou les concepts générés ne soient pas ceux qui sont attendus par l'enseignante ou l'enseignant. En fait, cela est généralement le cas, surtout quand l'apprentissage touche à des concepts assez abstraits ou complexes. L'enseignante ou l'enseignant doit alors intervenir. Pour comprendre le sens de cette intervention, rappelons ici le concept de *zone proximale de développement* introduite par Vygotski.

[7] Ces idées sont présentées de façon plus détaillée dans le clip vidéo *Apprentissage et zone proximale de développement* et dans le clip vidéo *Une approche socioculturelle vygotskienne* sur le DVD d'accompagnement.

Revenons au problème de la division qui a été mentionné ci-dessus et imaginons un élève de la 3e année qui utilise l'algorithme personnel de partage qui est montré à la Figure 1 de ce chapitre. Le concept quotidien de partage fait partie du répertoire conceptuel de l'élève. Ce concept et tous les autres concepts et les procédures dont dispose l'élève, à ce moment-là, constituent son niveau de développement conceptuel actuel. Celui-ci lui permet de résoudre certains problèmes, mais pas d'autres. Parmi ceux qu'il ne peut *pas* résoudre, il y en a qui sont absolument trop difficiles, car les concepts requis ne sont pas au niveau de sa maturité intellectuelle. Par exemple, il serait vain d'essayer qu'un enfant de 3e année divise des fonctions polynomiales. Le concept de division polynomiale est trop loin de ce qu'il pourrait arriver à faire à ce moment de son développement, même avec la meilleure aide pédagogique possible.

Or, il y a des concepts que cet élève ne peut pas acquérir seul, mais qu'il pourrait acquérir si on lui donnait de l'aide. Ces concepts auxquels l'élève peut accéder sont justement ceux qui constituent sa *zone proximale de développement*[8]. La Figure 2 illustre cette idée.

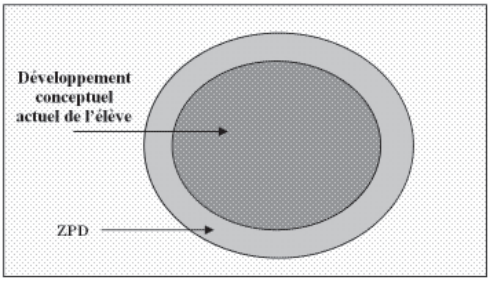


Figure 2. La petite ellipse au centre représente les concepts rattachés au développement conceptuel actuel de l'élève (DC). Au-delà de cette ellipse se trouve une zone constituée de concepts que l'élève peut acquérir en collaboration avec ses pairs ou avec l'enseignante ou l'enseignant. C'est la zone proximale de développement (ZPD). Au-delà de cette zone se trouve tout ce qui est définitivement au-delà du développement conceptuel de l'élève au moment en question.

Dire que l'enseignante ou l'enseignant est *partenaire* de l'apprentissage de l'élève signifie qu'elle ou il travaille avec l'élève et son groupe afin de les amener au-delà de ce qu'ils savent déjà, car c'est seulement en allant au-delà de ce que les élèves savent déjà faire qu'il y a véritablement un apprentissage. Autrement, on ne fait que tourner en rond.

Comment devenir partenaire efficace de l'apprentissage de l'élève? Voilà l'un des défis les plus importants de l'enseignante ou de l'enseignant. Il y a plusieurs niveaux d'intervention qui s'étalent le long d'un continuum qui va de donner un petit coup de pouce à l'élève jusqu'à travailler avec lui afin d'arriver à la solution.

On pourrait penser que, dans ce dernier cas, l'enseignante ou l'enseignant fait le travail à la place de l'élève. Ce n'est pas tout à fait vrai, puisque l'élève

[8] Remarquons que cette zone ne dépend pas que de l'élève. Elle dépend aussi de la *qualité* d'aide que l'enseignante ou l'enseignant et les pairs portent à l'élève.

a déjà fait tous les efforts qu'il pouvait. C'est-à-dire que l'élève a eu quand même la possibilité d'aller aussi loin que possible par ses propres moyens. L'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant part donc de ce que l'élève a pu faire. De plus, l'élève ne fait pas que regarder l'enseignante ou l'enseignant faire : il participe à la solution, même s'il n'est pas le meneur.

La zone proximale de développement repose sur l'idée que la compréhension d'un concept par l'élève ne doit pas forcément émaner du seul élève : il y a des cas où elle émane des actions des autres. L'élève peut comprendre véritablement un concept au cours d'une discussion avec d'autres élèves et avec l'enseignante ou l'enseignant (Vygotski, 1985, p. 271). Dans cette perspective, l'élève ne construit pas ses propres connaissances. Il les acquiert à l'aide des autres.

Les remarques précédentes nous permettent d'énoncer quelques caractéristiques d'une leçon modèle. C'est ce que nous ferons dans la section suivante.

Les caractéristiques d'une leçon modèle

Une leçon modèle passe par la création d'une dynamique de salle de classe qui va permettre aux élèves de s'engager dans des discussions et des échanges de haut niveau conceptuel. L'enseignante ou l'enseignant doit créer les conditions favorables, tant conceptuelles qu'émotionnelles, pour que les élèves se sentent à l'aise. La classe doit devenir une communauté d'apprentissage où l'élève perçoit le fruit de sa participation et de son travail non pas sous une optique individuelle compétitive, mais sous une optique de coopération. Cette coopération fait partie de l'effort que l'élève fait en travaillant avec d'autres élèves, où il se montre responsable en essayant de proposer des idées et de comprendre celles des autres.

Parmi les caractéristiques que doit posséder une leçon modèle, nous avons retenu les suivantes :

Les leçons :

a) partent du savoir de l'élève;

b) sont intéressantes du point de vue de l'élève;

c) font appel au matériel de manipulation ou à la technologie;

d) offrent un espace de réflexion et d'échange en favorisant le travail en petits groupes;

e) sont centrées sur des problèmes qui mobilisent les concepts mathématiques visés à des niveaux de profondeur adéquat;

f) présentent aux élèves des occasions de réfléchir à plusieurs niveaux d'abstraction;

g) ont une *unité conceptuelle* qui favorise le passage à l'abstrait.

Les chapitres suivants donnent des exemples de leçons modèles qui ont été élaborées et mises à l'essai par notre équipe de recherche.

Travaux cités et lectures supplémentaires

Bartolini Bussi, M. G. (1998). "Verbal interaction in the mathematics classroom: a Vygotskian analysis", in H. Steinbring, M. B. Bussi and A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, p. 65-84.

Berger, M. (2005). "Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education", *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Norway, vol. 2, p. 153-160.

Chaiklin, S. (2003). "The zone of proximal development in Vygotsky's analysis of learning and instruction", in A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev and S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 39-64.

Forman, E. A., and J. McPhail (1993). "Vygotskian perspective on children's collaborative problem-solving activities", in E. A. Foreman, N. Minick and C. A. Stone (Eds.), *Contexts for Learning. Sociocultural Dynamics in Children's Development*, New York, Oxford University Press, p. 213-229.

Henningsen, M., and M. K. Stein (1997). "Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning", *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), p. 524-549.

Jansen, A. (2008). "An investigation of relationships between seventh-grade students' beliefs and their participation during mathematics discussions in two classrooms", *Mathematical Thinking and Learning, 10*(1), p. 68-100.

Karpov, Y. V. (2003). "Vygotsky's doctrine of scientific concepts. It's role for contemporary education", in A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev and S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 65-82.

Kidron, I., A. Lenfant, A. Bikner-Ahsbahs, M. Artigue and T. Dreyfus (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions", *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*, p. 247-264.

Radford, L. (2006). « Communication, apprentissage et formation du "je communautaire" », dans B. D'Amore et S. Sbaragli (dir.), *Incontri con la Matematica, 20th National Italian Conference on the Teaching and Learning of Mathematics*, Bologna, Pitagora, p. 65-72. [disponible dans la section de publications du site : www.laurentian.ca/educ/lradford/]

Radford, L. (2009). « L'altérité comme problème éducatif », dans J. Boissonneault, R. Corbeil et A. Hien (dir.), *Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs*, Sudbury, Université Laurientienne, p. 11-27. [disponible dans la section de publications du site : www.laurentian.ca/educ/lradford/]

Radford, L., et S. Demers (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*, Ottawa, CFORP.

Schmittau, J. (2003). "Cultural-historical theory and mathematics education", in A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev and S. M. Miller (Eds.), *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context,* Cambridge, Cambridge University Press, p. 225-245.

Skovsmose, O., and P. Valero (2002). "Democratic access to powerful mathematical ideas", in L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, p. 383-407.

Tudge, J. (1990). "Vygotsky, the zone of proximal development, and peer collaboration: Implications for classroom practice", in L. C. Moll (Ed.), *Vygotsky and Education*, Cambridge University Press, p. 155-172.

Vygotski, L. (1985). *Pensée et langage*, Paris, Messidor.

Vygotski, L. (2003). *Conscience, inconscient, émotions*, Paris, Dispute.

CHAPITRE 3

Introduction aux méthodes algébriques de résolution d'équations

Dans ce chapitre, nous discuterons d'une séquence d'enseignement de trois leçons sur la résolution d'équations en 7e année. La séquence d'enseignement illustre les idées de base d'une leçon modèle qui favorise le passage à l'abstrait, telles qu'elles sont mentionnées à la fin du chapitre 2.

On sait qu'en 7e année la résolution d'équations se fait par « essais systématiques et par inspection » (*Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année*, *Mathématiques*, version révisée 2005, p. 82.). Les méthodes par essais systématiques et par inspection relèvent en fait de l'arithmétique. Elles ne font pas intervenir les concepts clés propres à la résolution d'équations par des méthodes algébriques — en particulier, elles ne font pas intervenir l'idée que l'égalité entre les deux côtés de l'équation se conserve, si on enlève un même nombre de chaque côté (ou si on ajoute un même nombre de chaque côté). Toutefois, nous verrons que les méthodes algébriques de résolution d'équations peuvent être abordées en 7e année avec succès.[9]

L'idée générale du début de la séquence d'enseignement a été la suivante.

Les élèves et l'enseignante discutent de la façon de résoudre un problème posé sous forme d'histoire : il s'agit d'un problème de cartes de hockey et d'enveloppes contenant un nombre inconnu de cartes de hockey. Deux élèves modélisent le problème au tableau, à l'aide de matériel concret (matériel de manipulation) que nous avons préparé au préalable (il s'agit de cartes de hockey simulées par des petits cartons verts et d'enveloppes; voir Figure 1).

Figure 1. Deux élèves simulent un problème à l'aide de cartes de hockey et d'enveloppes.

On s'attend à ce que la modélisation ne pose pas de problèmes. Par contre, les élèves vont probablement utiliser des méthodes arithmétiques, comme les « essais systématiques », qu'ils connaissent pour résoudre l'équation. L'enseignante interviendra pour essayer de les amener aussi loin que possible dans l'utilisation des méthodes algébriques.

Par la suite, les élèves travaillent en petits groupes de 3 à 4 élèves. Ils résolvent deux problèmes similaires (problèmes 2 et 3 de la feuille de route[10]), afin de prendre conscience de la méthode algébrique et d'arriver à une certaine stabilisation cognitive de celle-ci.

Avant d'aller plus loin, nous allons présenter quelques extraits des discussions que les élèves et l'enseignante ont eues en salle de classe.

[9] En fait, plusieurs recherches montrent que les méthodes algébriques d'équations peuvent commencer à être introduites plus tôt, dès la 4e année (voir, p. ex., Carraher, Schliemann et Brizuela, 2001; Brizuela et Schliemann, 2004).

[10] Voir la feuille de route en annexe.

L'émergence des idées algébriques

Voici le problème avec lequel l'enseignante a amorcé la leçon :

> La mère de Paulette et de Richard décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.
>
> Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.
>
> Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.
>
> Maintenant les 2 enfants ont le même nombre de cartes de hockey.
>
> Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Comme il a été prévu, deux élèves ont modélisé l'équation au tableau sans difficultés (Figure 1). Ils sont allés s'asseoir et l'enseignante a posé la question à toute la classe, à savoir « Comment résoudre l'équation? ».

Une élève, Maria[11], a suggéré d'enlever deux cartes à Paulette et deux cartes à Richard (voir Figure 2, gauche). De là, une autre élève, Jeannine, a conclu qu'il y a cinq cartes dans une enveloppe. Elle a dit :

> « Il en reste cinq [cartes], donc une des formes [c'est-à-dire des enveloppes] de l'autre côté va en avoir 5, puis, après,… ben, elles vont toutes avoir 5 [cartes] dedans. »

La Figure 2 illustre la stratégie proposée par Maria et Jeannine.

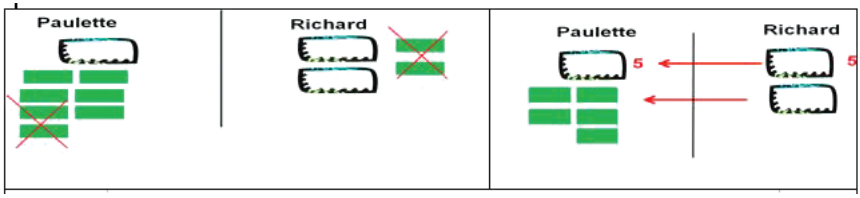


Figure 2. À gauche, Maria suggère d'enlever deux cartes de chaque côté de l'équation. À droite, Jeannine associe les deux enveloppes du haut et conclut que l'enveloppe du bas a 5 cartes. Puisque toutes les enveloppes ont le même nombre de cartes, elle dit : « elles vont toutes avoir 5 [cartes] dedans. »

La réponse, bien sûr, est correcte. Mais l'enseignante n'est pas intéressée par la réponse : ce qu'elle vise, c'est la procédure algébrique. Jeannine a utilisé une méthode par *association* : le nombre de cartes de hockey dans l'enveloppe à gauche, du haut, est le même que celui dans l'enveloppe

[11] Pour des raisons déontologiques, partout dans le livre, nous avons dû changer le nom des élèves.

à droite, du haut. Donc, pour qu'il y ait égalité, les 5 cartes à gauche doivent être égales au nombre de cartes dans l'enveloppe à droite, au bas.

Le raisonnement de Jeannine est certainement subtil. Mais on voudrait que les élèves comprennent qu'ils peuvent aussi enlever des enveloppes pour continuer à simplifier l'équation et ainsi *isoler* l'inconnue.

L'enseignante décide de recommencer le problème et de souligner les éléments clés de la résolution algébrique. Après avoir remis l'équation à son état initial elle dit :

1. **Enseignante :** Avant de commencer, qu'est-ce que cette ligne représente? Qu'est-ce qu'il y a de spécial entre le groupe de Paulette et le groupe de Richard? Qu'est-ce qu'il y a de spécial?
2. **Jeannine :** Ben, ils [le nombre de cartes des deux côtés] sont égaux.
3. **Enseignante :** (*en reprenant les mots de Jeannine*) les deux sont égaux. Ça (*elle signale le côté gauche de l'équation*) est égal à ça (*elle signale le côté droit de l'équation*). OK? Raphael, vas-y…
4. **Raphael :** Umm, moi, je ferai… moi, j'ai figuré que c'était 5 cartes dans chaque enveloppe… parce que Paulette a 7 cartes, plus 5 cartes dans l'enveloppe, ça ferait 12. Richard a 2 cartes de son côté, plus 5 de chaque enveloppe, ça ferait 2 plus 10 égale à 12.
5. **Enseignante :** OK. Tu es arrivé à la bonne réponse; tu essaies dans ta tête de substituer les enveloppes à des cartes, puis tu es arrivé à la bonne réponse.

Raphael suggère d'utiliser la méthode d'« essais systématiques ». Dans un problème simple, elle donne de bons résultats. Mais son utilisation est très limitée. On peut penser, par exemple, à un problème où la réponse serait un nombre décimal tel que 2,329. Trouver cette réponse serait virtuellement impossible. L'enseignante doit maintenant prendre une décision délicate. Elle ne veut pas simplement *montrer* la méthode aux élèves. Cela serait tomber dans l'enseignement traditionnel, où l'enseignante ou l'enseignant montre aux élèves comment faire et les élèves ne font que reproduire.

Elle revient alors en soulignant l'idée que l'égalité se conserve si on enlève des nombres égaux de chaque côté de l'équation.

6. **Enseignante :** Je vais reprendre les étapes. Je pense que c'est Maria qui m'a suggérée comment faire. (voir Figure 2, gauche) J'enlève deux [cartes] là; j'enlève deux [cartes] là. Êtes-vous d'accord que j'ai enlevé la même chose de chaque côté? (voir Figure 3, gauche)
7. **Élèves :** Oui.

8. **Enseignante :** Les côtés sont égaux. Qu'est-ce qui arrive si je fais ça? (*elle enlève une enveloppe de chaque côté*) Est-ce que j'ai enlevé la même chose? (voir Figure 3, droite)
9. **Élèves :** Oui.
10. **Enseignante :** Chaque côté est encore égal [à l'autre]? Là, je vous repose la question. Combien de cartes contient chaque enveloppe? Rose?
11. **Rose** : Cinq.
12. **Enseignante :** Cinq. Elle a cinq cartes, lui a une enveloppe, il a encore la même chose parce que j'ai enlevé la même chose à chaque fois. L'enveloppe contient cinq cartes.

Figure 3. À gauche, l'enseignante enlève deux cartes de chaque côté de l'équation. À droite, elle enlève une enveloppe de chaque côté. Sur le tableau, il y a maintenant cinq cartes à gauche et une enveloppe à droite.

L'enseignante a réussi à faire ressortir deux idées clés de la méthode algébrique : on peut enlever le même nombre de cartes et le même nombre d'enveloppes de chaque côté de l'équation. On remarquera qu'elle insiste sur ce qui justifie la réponse : à la ligne 12, elle dit : « …parce que j'ai enlevé la même chose à chaque fois. » *C'est le principe algébrique de conservation de quantités*.

L'enseignante a par la suite discuté avec les élèves de la façon dont on peut dessiner la procédure de résolution. Dessiner la procédure est une étape vers l'abstraction : à la place de résoudre l'équation à l'aide des actions concrètes sur le matériel de manipulation, on doit *dessiner* les actions.

À la suite de cette discussion générale d'introduction, les élèves étaient prêts à travailler en petits groupes de façon autonome. Dans la section qui suit, nous allons voir quelques extraits de leur travail.

La résolution d'équations à l'aide du matériel de manipulation

Voici un des problèmes que les élèves devaient résoudre :

> La mère de Mat et de Matik décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.
>
> Mat avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.
>
> Matik avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 3 enveloppes.
>
> Maintenant les 2 enfants ont le même nombre de cartes de hockey.
>
> Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Les élèves ont modélisé l'équation sans problème. Voici la discussion d'un des petits groupes, le groupe de Sylvain (assis à gauche), Véronique (assise au centre) et Pierre (assis à droite). Les quantités de Matik sont disposées sur le pupitre de Sylvain (pupitre à gauche) et celles de Mat, sur le pupitre de Pierre (pupitre à droite).

13. **Sylvain :** Pierre, enlève 3 cartes.
14. **Pierre :** Il [Mat] enlève 1 carte, une autre carte et encore une autre carte (voir Figure 4, gauche) […]
15. **Sylvain :** Toi, tu enlèves une enveloppe et moi, j'enlève une enveloppe (voir Figure 4, milieu et droite).
16. **Véronique :** Combien de cartes y a-t-il dans chaque enveloppe?
17. **Sylvain :** Il y a 2 cartes dans chaque enveloppe.

Figure 4. À gauche, Sylvain et Pierre ont enlevé 3 cartes et les ont placées sur le pupitre de Véronique. Au centre, Sylvain enlève une enveloppe. À droite, Pierre enlève à son tour une enveloppe. Sur un côté de l'équation, il reste alors 2 enveloppes et sur l'autre côté, 4 cartes.

Une fois l'équation initiale établie, les élèves ont mis environ 30 secondes à la résoudre. Après, ils ont dessiné la procédure. La Figure 5 montre le dessin de la copie de Véronique.

Figure 5. Le dessin de la procédure de résolution de Véronique.

Vers une deuxième abstraction

Nous avons mentionné précédemment que le dessin de la procédure exige une première abstraction. En déplaçant les objets, les élèves effectuent des actions concrètes. L'équation se simplifie progressivement, jusqu'à aboutir à une équation dont les enveloppes se trouvent isolées. Le dessin ne permet pas la même flexibilité : on ne peut pas enlever les objets. Alors, pour signifier qu'on enlève quelque chose, les élèves barrent les objets en question.

Dans le problème 4, nous avons demandé aux élèves d'expliquer, dans leurs propres mots, les étapes qu'on doit suivre pour résoudre une équation. Il y a ici une autre abstraction importante, car l'équation n'est pas donnée. Il s'agit d'une équation *quelconque*, similaire à celles que les élèves ont rencontrées précédemment. Le passage à ce nouveau niveau d'abstraction a présenté quelques difficultés, mais les élèves ont fini par les surmonter. Voici un extrait de la discussion du groupe de Véronique.

18. **Sylvain :** Tu enlèves le même montant de cartes… Attends, non, non, non. Tu enlèves les cartes du plus… faut que tu enlèves le même nombre de cartes de la personne qui en a le moins.
19. **Pierre :** Oui.
20. **Sylvain :** Puis après ça, tu ôtes une enveloppe sur chaque bord […]
21. **Pierre et Véronique :** Enlève.
22. **Sylvain :** Tu enlèves les cartes de la personne qui en a le moins, jusqu'à ce qu'il ne reste que deux enveloppes.
23. **Véronique :** Pourquoi jusqu'à ce qu'il ne reste que deux enveloppes?
24. **Sylvain :** Ben, jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'enveloppes.
25. **Pierre :** Jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. […]
26. **Véronique :** Enlève le même montant de cartes et d'enveloppes sur les deux côtés…

27. **Pierre :** Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'enveloppes et de cartes sur un côté ou l'autre.

28. **Sylvain :** Non, non, non, non, non. Non, non, non, non, non. Ça ne fait pas de sens!

Alors que résoudre une équation particulière, comme celle vue à la section précédente, ne pose pas de problèmes, expliquer la méthode de résolution, en général, est loin d'aller de soi. Mais cet effort est nécessaire pour que les élèves atteignent une compréhension plus profonde de la méthode algébrique. Cette compréhension deviendra importante lors du passage au symbolisme. Mais revenons à la discussion des élèves et voyons comment ils ont continué à raffiner les idées. Puisqu'ils ne se mettaient pas d'accord sur la façon d'exprimer la méthode générale de résolution, les élèves ont refait le problème de Mat et Matik. Ils sont donc revenus au concret. Après, ils ont recommencé leur discussion comme suit :

29. **Pierre :** Tu enlèves le même montant de cartes et d'enveloppes, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'enveloppes ou de cartes… jusqu'à ce qu'il n'aille plus d'enveloppes.

30. **Sylvain :** Non Pierre. Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes sur un côté et sur l'autre côté […]

31. **Véronique :** C'est compliqué!

Après d'autres moments de discussion, les élèves ont écrit leur réponse. Voici celle de Véronique.

> Tu enlèves le même montant de cartes sur chaque côté [jusqu'à ce qu'il] n'y en ait plus. Après tu enlèveras le même montant d'enveloppes jusqu'à ce qu'un côté n'en ait plus. Tu divises le montant de cartes par le montant d'enveloppes (p. ex., si tu as 100 cartes, puis 4 enveloppes, tu feras 100 ÷ 4 qui te donnera 25 cartes dans chaque enveloppe).

Le passage au symbolisme algébrique

Le lendemain, les élèves ont utilisé des équations en lettres pour résoudre les problèmes de la veille et d'autres problèmes.

L'enseignante a commencé par une discussion sur la façon d'écrire en symboles algébriques l'équation de Mario et Chantal (problème 2). Ce problème était le suivant :

> La mère de Mario et de Chantal décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Mario avait déjà 12 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Chantal avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 4 enveloppes.

Chantal a le même nombre de cartes de hockey que Mario.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Voici un extrait de la discussion menée par l'enseignante :

32. **Enseignante :** (*en s'adressant à la classe*) On se base encore sur la leçon d'hier, mais on avance. Vous n'avez plus d'enveloppes, vous n'avez plus de cartes. Allez au problème numéro deux sur vos feuilles. Là, je vous demande de représenter cette situation, mais d'une autre façon, parce qu'on n'a plus de matériel. Je veux que vous utilisiez des symboles mathématiques pour représenter la même chose. Pierre?

33. **Pierre :** x puis y.

34. **Enseignante :** OK, pourquoi tu utilises x et y?

35. **Pierre :** Bien, x, ça pourrait signifier le nombre de cartes, puis y, ça pourrait être les enveloppes!

36. **Enseignante :** OK. Est-ce qu'on a besoin de x pour représenter le nombre de cartes? Quand est-ce qu'on met un x habituellement? Ginette?

37. **Ginette :** Une inconnue.

38. **Enseignante :** Mais est-ce que les cartes, c'est inconnu? (*les élèves répondent non*) Non, parce qu'on nous dit que Mario a 12 cartes, puis on sait que Chantal en a trois. Donc, on n'a pas besoin d'utiliser le x pour le nombre de cartes. Jane?

39. **Jane :** Tu mets le nombre de cartes, comme Mario en a 12, plus une enveloppe.

40. **Enseignante :** OK, donc on va commencer avec les douze cartes de Mario (*elle écrit 12 au tableau*). […] Est-ce qu'on connaît le nombre de cartes qui est à l'intérieur des enveloppes? (*les élèves répondent non*) Non. Mais, si je mets juste un « 1 », là, c'est comme dire que j'ai douze cartes, plus une autre carte, mais ce n'est pas ça. J'ai une enveloppe qui a des cartes à l'intérieur. Mais je ne connais pas ce nombre de cartes là. Donc, Ginette?

41. **Ginette :** Tu peux mettre 12, plus comme y ou x?

42. **Enseignante :** On va utiliser n, OK? n, ça représente quoi?

43. **Ginette :** L'enveloppe?

44. **Aline :** Le nombre de cartes dans l'enveloppe!

45. **Enseignante :** Le nombre de cartes dans l'enveloppe! Le *n* représente le nombre de cartes à l'intérieur. On va utiliser une lettre, parce qu'on ne sait pas le nombre encore. OK, je continue (*elle écrit au tableau*). Ça, c'est Mario? (*elle pointe sur l'équation au tableau : 12 + 1*n). On va aller à Chantal. Chantal, elle? Véronique?

46. **Véronique :** Ça serait 3 plus 4*n*?

47. **Enseignante :** (*elle écrit au tableau*) trois, parce que c'était trois cartes. Quatre, parce qu'elle avait quatre enveloppes […] Là, il manque quelque chose. (*elle a écrit 12 + 1*n *et 3 + 4*n *au tableau*) Il manque quelque chose entre les deux.

48. **Jane :** Bien, égal, puisque 12 + 1*n* est égal à 3 + 4*n*.

Cet extrait relativement long montre bien le cheminement progressif au cours duquel les élèves prennent conscience de la façon dont on écrit une équation en symboles algébriques. La première idée des élèves est d'utiliser des lettres pour exprimer le nombre de cartes et le nombre d'enveloppes. Aux lignes 36 à 38, l'enseignante fait remarquer que le nombre de cartes est connu et qu'on n'a pas besoin d'une lettre pour le représenter. En algèbre, les lettres sont réservées aux inconnues.

Vient ensuite le choix de la lettre et de sa signification. À la ligne 42, l'enseignante dit : « : On va utiliser *n*, OK? *n*, ça représente quoi? ». Un élève répond que *n* représente le nombre d'enveloppes. Or, ce n'est pas cela. La lettre *n* représente le nombre de cartes dans une enveloppe. C'est ce que l'enseignante clarifie à la ligne 45, à la suite de l'intervention d'Aline à la ligne 44. Peu à peu, à la suite d'un travail très fin de la part de l'enseignante, l'équation émerge : 12 + 1*n* = 3 + 4*n*. L'épisode finit avec la discussion de la résolution de cette équation.

À l'instar de la veille, les élèves ont travaillé en petits groupes. Ils devaient mettre en équation et résoudre le problème de Mat et Matik. Même si le problème avait déjà été résolu à l'aide du matériel de manipulation, penser sa solution en lettres, c'est-à-dire grâce au symbolisme algébrique, n'est pas allé de soi : le résoudre à l'aide du matériel de manipulation a pris moins que 30 secondes. Le résoudre avec des lettres a pris plus de 5 minutes…

Voici un extrait du groupe de Véronique :

49. **Véronique :** *n* est égal au nombre de cartes dans l'enveloppe?

50. **Sylvain :** Ouin, *n* est égal au nombre de cartes dans l'enveloppe […]

51. **Sylvain :** 7 plus 1, 7 plus *n* […]

52. **Véronique :** Est égal à 3 plus 3*n*.

53. **Pierre et Sylvain :** Ouen (*ils finissent d'écrire l'équation*; voir Figure 6, ligne 1) […]

54. **Sylvain :** Après ça, on va faire un petit moins… moins trois.

55. **Pierre :** 7… moins 3, plus un *n*. Puis 3 moins petit 3… plus 3*n* (voir Figure 6, ligne 2).

56. **Sylvain :** OK, là après ça, on va faire 4 plus *n*.

57. **Véronique :** 4 plus *n* est égal à 3*n* (voir Figure 6, ligne 3) […] Là, on ferait 4 plus *n*, moins 1, est égal à…

58. **Sylvain :** (*interrompt*) Ouin, le petit *n* là, après ça, on va faire un petit moins 1.

59. **Véronique :** 3 plus *n* moins 1.

60. **Pierre :** Petit 1 en haut (voir Figure 6, ligne 4).

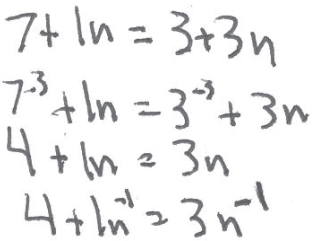


Figure 6. L'équation écrite par Pierre et les premières étapes de la solution.

Lors de la discussion générale, l'enseignante et les élèves avaient convenu que les actions de soustractions seraient écrites à l'aide de petits nombres, placés légèrement en haut. L'enseignante est venue voir le travail du groupe de Pierre, quand le groupe terminait d'écrire la ligne 4. Elle a remarqué que l'écriture pouvait porter à confusion. En s'adressant à Pierre, elle dit :

61. **Enseignante :** Qu'est-ce que tu as écrit là, Pierre? Est-ce que c'est… Qu'est-ce que tu enlèves (*elle pointe le petit 1 du côté droit de l'équation*; voir Figure 7, gauche)?

62. **Pierre :** Une enveloppe.

63. **Enseignante :** OK, mais qu'est-ce que tu enlèves? Le moins 1, là? Qu'est-ce que le moins 1 représente?

64. **Pierre :** Oh! Un *n*. J'ai oublié.

65. **Sylvain :** T'enlèves une enveloppe (*Pierre ajoute le petit* n; voir Figure 7, centre, ligne 4) […]

66. **Véronique :** OK, là, après ça, ça serait…

67. **Sylvain :** 4 est égal… à 2*n* (Figure 7, centre, ligne 5). Puis, là, non, non, non!

68. **Pierre :** Oui!

69. **Sylvain :** Non, non, non, non! 4 divisé par… […]

70. **Véronique :** Là, après, on ferait 4 divisé par 2 est égal…

71. **Sylvain :** Eh? Woah! Minute là […] 4 est égal à 2*n*. Vois-tu là? […]
72. **Véronique :** 4 divisé par 2 est égal à 2*n* divisé par…
73. **Sylvain :** Whoa, whoa, whoa, whoa.
74. **Véronique :** Non, là, ça ferait pas de sens.
75. **Sylvain :** 4 divisé par 2*n* […]
76. **Véronique :** 4 divisé par 2, est égal à 2*n* divisé par 2 (Figure 7, centre, ligne 6) […]
77. **Sylvain :** Exactement, 2*n* divis… non, non, 4 divisé par 2*n*.
78. **Pierre :** Ah! J'ai oublié de diviser quelque chose.
79. **Sylvain :** 2*n* divisé par 2. Ah, non. Ah, oui […]
80. **Véronique :** 2 est égal à 1*n* (Figure 7, centre, ligne 7)
81. **Sylvain :** Tu mets un petit signe d'égal, puis c'est égal à deux cartes dedans chacun.
82. **Pierre :** Oui, c'est ça. 2 est égal à 1*n*. Deux cartes dans une enveloppe.
83. **Sylvain :** Dans chaque enveloppe.
84. **Pierre :** Oui. Ah!
85. **Sylvain :** Man, mon brain est en train de travailler fort cette fois ici, eh? (*ils rient pendant un moment*; Figure 7, droite).

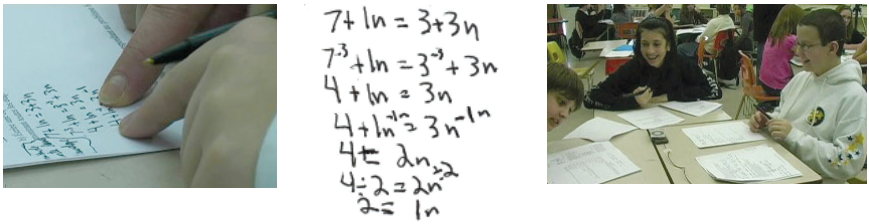


Figure 7. À gauche, l'enseignante attire l'attention de Pierre sur l'exactitude de l'écriture de l'équation. Au centre, ligne 4, Pierre corrige l'écriture. Le reste de la solution se trouve aux lignes 5 à 7. À droite, Sylvain dit que son cerveau a travaillé fort lors de la résolution symbolique de l'équation, ce qui amuse ses compagnons d'équipe.

Le discours des élèves navigue maintenant sur des eaux très abstraites. Il est intéressant de remarquer l'absence de mots contextuels lors de la résolution de l'équation. S'il est vrai qu'aux lignes 49 et 50 (c'est-à-dire aux lignes qui correspondent à la traduction du problème en équation symbolique), on trouve encore des références aux cartes et aux enveloppes, ces termes disparaissent dans les lignes suivantes, pour n'émerger que rapidement à la ligne 65, quand il a été nécessaire de revenir sur la signification du « moins 1 ». Le contexte revient à la fin, quand il faut réinterpréter la réponse.

À la fin de la deuxième journée, les élèves ont apporté avec eux un devoir à faire à la maison (voir en annexe).

Voici les solutions aux deux premiers problèmes du devoir de Jane :

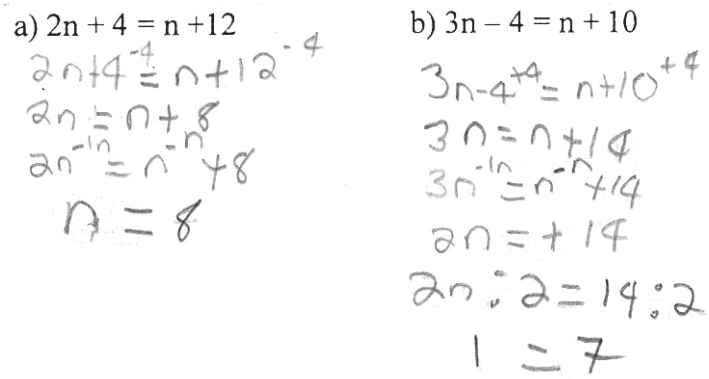


Figure 8. Deux problèmes donnés en devoirs, après deux périodes d'étude des équations[12].

D'autres équations

La progression des élèves vers l'abstraction mathématique ne s'est pas arrêtée là. Le lendemain, les élèves ont abordé des équations sans contexte, c'est-à-dire des équations données sous forme de symboles. On a commencé cette troisième période par une révision du devoir. Par la suite, les élèves ont travaillé en petits groupes.

Deux problèmes qu'ils devaient aborder étaient les suivants :

- $7n + 2 = 6n + 8$
- $2x + 3 = x + 5$

Le premier problème a été résolu sans difficultés. Mais le deuxième problème a suscité des discussions autour de la signification de la lettre x :

86. **Véronique :** Là, les x, ils vont valoir encore les enveloppes.
87. **Pierre :** Oui.
88. **Sylvain :** Non, il faut qu'on… il faut qu'on découvre, c'est quoi la valeur de x.
89. **Véronique :** C'est les enveloppes.
90. **Pierre :** C'est inconnu.
91. **Sylvain :** $2x$, ça veut dire, 2 fois quelque chose, plus 3 est égal à, quelque chose plus 5.
92. **Véronique :** Fois quelque chose?
93. **Pierre :** Non, il a, x, x c'est comme n.
94. **Sylvain :** Non.

[12] On notera que, dans l'équation b), l'élève oublie d'écrire $1n = 7$ dans la dernière ligne. Mais le sens du nombre « 1 » est clair. Il s'agit de la valeur de l'inconnue : « $1n = 7$ ».

95. **Pierre :** *n* c'était le nombre d'enveloppes

96. **Sylvain :** *n* c'était des enveloppes, fallait qu'on découvre qu'est-ce qu'il y avait dans les enveloppes.

97. **Pierre :** Bien, là, imagine que le *x*, c'est des enveloppes.

98. **Sylvain :** Bien, c'est pas… c'est pas de… *n*.

99. **Pierre :** Bien, on n'a juste qu'à imaginer!

100. **Sylvain :** Ben, on ne peut pas imaginer en maths!

101. **Véronique :** C'est la même chose, juste, qu'à la place de *n*, on a dit *x*.

Les élèves se sont finalement mis d'accord pour dire que *x* pouvait représenter d'autres choses que l'inconnue dans le contexte d'enveloppes. La solution de Véronique apparaît dans la Figure 9.

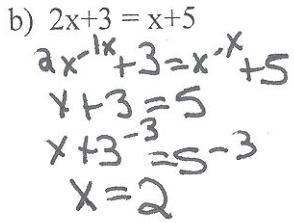


Figure 9. Solution de l'équation sans contexte où l'inconnue est représentée par la lettre *x*.

Synthèse

Au chapitre 2, nous avons énoncé quelques caractéristiques de leçons qui favorisent l'apprentissage des mathématiques et le passage à l'abstrait.

La séquence des leçons vues dans ce chapitre rencontre ces conditions. En particulier, on a pu voir l'importance d'utiliser un contexte familier aux élèves, celui de cartes de hockey et de cartes qu'on met à l'intérieur de quelques enveloppes. On a également pu voir l'importance du matériel de manipulation. Le contexte et le matériel de manipulation ont permis aux élèves de commencer à effectuer des raisonnements algébriques complexes à un niveau relativement concret. Ajoutons que l'organisation du travail en petits groupes a favorisé l'échange des idées et leur raffinement.

À ces trois éléments (contexte, matériel de manipulation et travail en groupe) s'ajoute le choix judicieux des problèmes. Les problèmes ont été énoncés de telle sorte qu'ils font appel aux concepts algébriques visés. Bien sûr, les problèmes posés pouvaient aussi se résoudre par des méthodes arithmétiques, ce qu'on voulait précisément éviter (c'est-à-dire les méthodes par essais systématiques). C'est justement là que l'enseignante a joué un rôle très important. On a vu comment, à l'aide de questions précises, elle a su amener les élèves vers les concepts algébriques visés. Les discussions générales devant la classe ont permis aux élèves de comprendre d'autres manières plus directes et efficaces de résoudre les problèmes posés.

La clé du succès de la séquence d'enseignement a été l'*unité conceptuelle*, c'est-à-dire une gradation progressive du niveau de difficulté des problèmes donnés aux élèves. Dans les chapitres précédents, nous avons mentionné qu'il est inexact de croire que la pensée mathématique peut se développer chez l'élève grâce à la solution de problèmes sans fil conducteur. Munir les problèmes d'un fil conducteur, les rendre cohérents autour d'un thème qui devient de plus en plus complexe, est un point important de l'enseignement des mathématiques.

Dans les chapitres qui suivent, nous reviendrons sur ces points. Mentionnons, pour conclure, que cette expérience d'introduction des concepts algébriques en 7e année, suggère, de façon claire, que nous pouvons présenter aux élèves des résolutions d'équations par des méthodes algébriques beaucoup plus tôt qu'il est proposé dans le *Curriculum de l'Ontario*. On peut naturellement utiliser l'approche esquissée ici en 9e année. Mais, à la lumière de notre recherche ainsi que de celles menées par d'autres chercheurs aux États-Unis, en Australie et en Italie, on peut se demander si le fait de commencer à résoudre des équations par des méthodes algébriques trop tard ne vient pas nuire à l'apprentissage. Il se peut que les méthodes arithmétiques s'ancrent trop profondément chez l'élève au point d'en constituer un obstacle pour l'apprentissage de l'algèbre en 9e année.

Travaux cités et lectures supplémentaires

Brizuela, B., and A. Schliemann (2004). "Ten-year-old students solving linear equations", *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), p. 33-40.

Carraher, D., A. Schliemann and B. Brizuela (2001). "Can young students operate on unknowns?", in M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, Utrecht University, The Netherlands, p. 130-140.

Filloy, E., L. Puig and T. Rojano (2007). *Educational Algebra: A Theorical and Empirical Approach*, New York, Springer Verlag.

Radford, L. (2002). "Algebra as tekhnē. Artefacts, symbols and equations in the classroom", *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(1), p. 31-56.

Radford, L. (2008). "Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts", *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), p. 83-96.

Radford, L., et M. Grenier (1996). « Entre les idées, les choses et les symboles. Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre », *Revue des sciences de l'éducation*, *22*, p. 253-276.

Rossi Becker, J., and F. Rivera (2006). "Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra", in S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz and A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, Mérida, Mexico, Universidad Pedagógica Nacional, p. 95-101.

Rossi Becker, J., and F. Rivera (2006). "Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level", in J. Novotná, H. Moraová, M. Krátkná and N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, Prague, Czech Republic, p. 465-472.

CHAPITRE 4

Interprétation et production de graphiques

Ce chapitre porte sur une série de leçons de 8e année centrées sur les concepts de graphique, de table de valeurs et d'équation dans un contexte de résolution de problèmes. L'attente visée est la suivante :

> Utiliser une table de valeurs, une représentation graphique et une équation algébrique afin de résoudre des problèmes portant sur des relations. (*Curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, 8e année, version révisée 2005, p. 90).

La série de leçons de ce chapitre est différente de celle vue au chapitre précédent en ce qu'elle porte sur l'*approfondissement* de deux concepts et l'*introduction* d'un nouveau concept. Les concepts à approfondir sont ceux de graphique et de table de valeurs; ils ont déjà été vus par les élèves en 7e année (voir Attente 1, 7e année, p. 82). Le nouveau concept est celui d'équation algébrique.

L'approfondissement que nous proposons consiste, en particulier :

(1) en une *interprétation*, *utilisation* et *production* de graphiques et

(2) en la mise en relation entre graphiques et tables de valeurs dans des situations qui exigent le prélèvement de données et l'articulation de plusieurs phénomènes.

C'est justement cette articulation de plusieurs phénomènes qui constitue la trame de l'unité conceptuelle dont le but est d'amener les élèves à s'engager dans des processus d'abstraction qui partent d'une expérience concrète et intéressante pour eux.

L'unité conceptuelle assure également une introduction simple aux équations algébriques, dans un contexte où l'élève met en relation l'équation avec une table de valeurs et un graphique. Puisque nous avons déjà discuté en détail du problème des équations au chapitre précédent et que nous reviendrons sur ce point dans les chapitres suivants, nous allons nous centrer ici sur les activités d'approfondissement.[13]

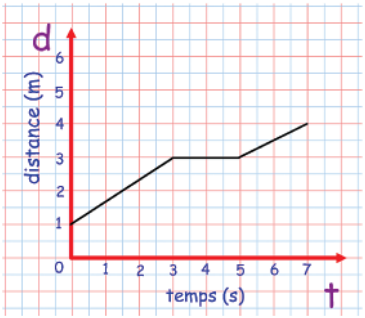
La première activité : la compétition de la marche

Nous avons commencé par une activité où les élèves devaient reproduire un graphique qui exprimait le mouvement de deux personnes : Tina et Jean. Voici un extrait des directives :

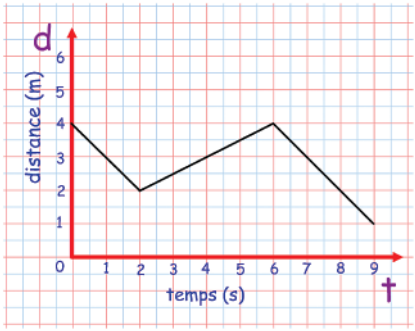
1. Tina se trouve à 1 mètre d'une fontaine. Elle commence à marcher en ligne droite. Le premier graphique de la page suivante (à gauche) représente sa marche.
2. Jean se trouve à 4 mètres de la fontaine. Il commence à marcher en ligne droite. Le deuxième graphique de la page suivante représente la marche effectuée par Jean.

[13] Toutefois, nous encourageons une lecture de l'activité autour des équations algébriques en annexe (voir l'activité « La fenêtre de Matthieu »).

Marche de Tina



Marche de Jean



Dans la première partie, les élèves devaient discuter, en petits groupes, de l'interprétation de ces graphiques. Ensuite, munis d'un chronomètre et d'un ruban à mesurer, ils devaient répéter la marche de Tina et celle de Jean. Quand les élèves étaient prêts, ils pouvaient aller avec l'enseignant dans le couloir. L'enseignant avait un détecteur de mouvement, appelé CBR (Calculator Based Ranger), branché à une calculatrice.

L'élève qui jouait le rôle de Tina reproduisait la marche, laquelle était enregistrée par le CBR et la calculatrice. Cette marche devant le CBR ne pouvait se faire que deux fois. On procédait de la même façon pour la marche de Jean. Dans chaque cas, la calculatrice montrait le graphique et, selon l'exactitude de celui-ci, l'enseignant donnait des points au groupe (voir l'activité « Compétition de la marche » en annexe).

L'interprétation des graphiques

Voici un extrait de l'interprétation de la marche de Jean faite par le groupe de Josée, Richard et Kent :

1. **Josée :** Alors, ici, il faut que tu… il faut que tu recules (*elle pointe le premier segment du graphique de Jean*), [tu] avances (*elle pointe le deuxième segment du graphique*), puis [tu] recules (*elle pointe le troisième segment*).
2. **Kent :** Huh? (*pendant que Josée dit « il faut que tu recules », il pointe aussi le premier segment du graphique de Jean*; voir Figure 1, gauche)
3. **Josée :** Ouen, so 4 mètres… il faut que tu recules à 2 mètres.
4. **Kent :** (*en même temps*) Recule à 2 mètres.
5. **Josée :** Dans 2 secondes.
6. **Richard :** Oh!
7. **Josée :** Et, après ça, tu avances?

8. **Kent :** Tu t'avances à 4 mètres dans 6 secondes.
9. **Josée :** Dans… OK, 4 secondes.
10. **Richard :** Puis, là, tu redescends jusqu'à…
11. **Kent :** Huh?
12. **Josée :** Ben…
13. **Richard :** Là, tu recules de…
14. **Kent :** Il faut que, il faut que tu avances de 4 mètres dans 6 secondes.
15. **Josée :** Tu sais, il en a 4.
16. **Richard :** Il faut que tu recules de 3 mètres jusqu'à… (*il déplace lentement son stylo sur le troisième segment*; voir Figure 1, droite).
17. **Josée :** Yeah, mais 4 secondes.
18. **Richard :** 9 secondes…
19. **Kent :** OK, OK.
20. **Josée :** Ouen, quand on… quand on recule, quelqu'un prend le chronomètre et dit OK, partez, puis là, on avance, recule...

Figure 1. À gauche, lors de la génération d'une première interprétation du graphique de Jean, Kent parcourt le premier segment avec son stylo d'un mouvement qui va du haut vers le bas. À droite, Richard fait un geste similaire sur le dernier segment du graphique.

À la ligne 1, Josée propose une première interprétation qualitative. Elle ne fait qu'indiquer le type de mouvement que les élèves devront faire afin de reproduire la marche de Jean : « il faut que tu… il faut que tu recules, [tu] avances, puis [tu] recules. » Il y a, par la suite, un raffinement de l'interprétation. À la ligne 3, elle présente les premières données quantitatives : la personne qui fera la marche devra se placer à 4 mètres, puis reculer à 2 mètres. À la ligne 5, elle fait intervenir le temps : il faut se déplacer pendant 2 secondes.

Aux lignes 7 et 8, les élèves discutent du deuxième segment. Kent dit : « Tu t'avances à 4 mètres dans 6 secondes. » La référence au temps n'est pas claire : veut-il dire que la personne qui marche se déplace pendant 6 secondes ou

bien qu'à 6 secondes elle doit s'être avancée de 4 mètres? Dans les lignes qui suivent, les élèves essayent de désambiguïser l'interprétation.

On voit déjà apparaître un problème qui sera présent dans l'interprétation des graphiques, à savoir la description du temps :

(1) soit selon la durée de l'intervalle considéré (on se déplace pendant 4 secondes),

(2) soit selon le temps écoulé depuis l'instant zéro.

Dire qu'on avance de 6 mètres pendant 6 secondes, cela relève de la première description. Dire qu'on se trouve à 4 mètres quand le temps total écoulé est égal à 6 secondes, cela relève de la deuxième interprétation.

Le graphique cartésien va privilégier la deuxième description, car il sert à décrire le phénomène d'une manière *globale* et *systématique*. C'est cela le rôle du point (0, 0). Le premier zéro désigne l'origine spatiale (ici l'emplacement de la fontaine). L'autre zéro désigne le moment où la personne en question commence à marcher. C'est le moment où l'on actionne le chronomètre.

La Figure 2 montre, sur la photo de gauche, les élèves en train de mesurer l'espace au cours de la préparation de la marche. Ils placent des repères spatiaux qui indiquent des points clés (1 m, 3 m et 4 m dans la marche de Tina). Ce sont des points que la personne qui marche devra atteindre à certains moments clés (0 seconde, 3 secondes et 7 secondes). Sur la photo de droite, on voit Josée marcher, alors que Richard mesure le temps et que Kent observe la position de Josée dans l'espace.

Figure 2. À gauche, les élèves mesurent l'espace lors de la préparation de la marche. À droite, ils répètent la marche.

Avant d'aller voir l'enseignant, les élèves devaient écrire leur explication de la marche de Tina et de Jean.

Voici ce qu'on trouve sur la copie d'un des élèves de cette classe de 8e année :

Marche de Tina : « Tu dois commencer à 1 mètre, prends 2 secondes pour marcher à 3 mètres, attends 2 secondes et ensuite marche à 4 mètres en 2 secondes. En tout, tu dois avoir marché pour 7 secondes. »

Marche de Jean : « Tu dois commencer à 4 mètres. Il faut marcher à reculons jusqu'à 2 mètres en 2 secondes. Il faut marcher vers l'avant à 4 mètres dans 4 secondes et ensuite il faut marcher à l'envers à 1 mètre en 3 secondes. En tout, cette marche a duré 9 secondes. »

On remarque que, dans le premier segment de la première explication, les élèves font référence à une durée de 2 secondes, à la place d'indiquer une durée de 3 secondes. De plus, ils font référence à la distance parcourue dans chaque étape. Pour ce qui est du temps, on ne fait pas mention du temps initial, mais de la durée des marches successives. Cette description satisfait de manière adéquate les besoins pratiques de la marche à effectuer.

Or, une description plus mathématique de l'expérience (telle qu'elle a été demandée dans l'activité; voir l'annexe) pourrait se faire par rapport au temps écoulé (c'est-à-dire au temps en tant que *variable*). Une telle description pourrait se traduire ainsi : « Tina a commencé à 1 mètre de la fontaine. Elle a marché à une vitesse constante, et à 3 secondes elle est arrivée à 3 mètres de la fontaine. Elle est restée là, et à 5 secondes elle a marché à une vitesse constante afin de se trouver, à 7 secondes, à 4 mètres de la fontaine. »

Bien sûr, comprendre que le phénomène doit être décrit à l'aide de deux variables qui commencent à zéro fait partie de l'apprentissage des élèves. Notre but ici est de faire remarquer qu'il faut être vigilant pour s'assurer de pouvoir amener les conceptualisations des élèves au niveau de scientificité escompté.

Revenons maintenant à la marche effectuée par ce groupe devant l'enseignant. Dans le groupe de Josée, c'est elle qui a été désignée pour effectuer la marche. L'enseignant a actionné le CBR. Le graphique produit par la calculatrice lors de la reproduction de la marche de Tina est montré sur la Figure 3.

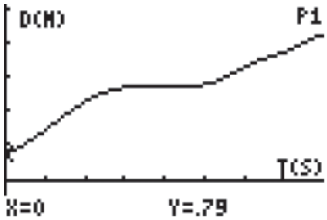


Figure 3. Graphique de la reproduction de la marche de Tina telle que l'a effectuée Josée.

On voit que l'effort de Josée et de son groupe a donné de bons résultats!

Le lendemain, les élèves ont travaillé sur la suite de cette activité. Dans la section suivante, nous faisons un survol de cette activité.

Tina et le chien

En s'appuyant sur le graphique de Tina étudié la veille, les élèves devaient calculer la vitesse de Tina pendant les trois premières secondes de sa marche. Ils devaient aussi identifier le segment de sa marche où elle va plus vite.

Après avoir calculé la vitesse correspondant au premier et au troisième segment du graphique, les élèves ont conclu que c'était bien lors des trois premières secondes que Tina marche plus vite.

C'est à la troisième question que les réponses ont commencé à varier. La question était : « Quand Tina se trouve-t-elle à 3 mètres de la fontaine? » Certains élèves ont répondu comme suit : « Tina se trouve à 3 mètres de la fontaine entre 3 et 5 secondes, car elle a pris une pause. » Mais d'autres élèves ont donné une réponse partielle : ils ont dit que « Tina se trouve à 3 mètres de la fontaine à 3 secondes ». L'enseignant a discuté avec les élèves et a fait voir que la question ne disait pas : « À quel moment arrive-t-elle à 3 mètres? »

Le but de la question était justement de faire ressortir plusieurs réponses afin de faire comprendre aux élèves que, du point de vue de l'interprétation mathématique du graphique, toute valeur de la variable « temps » associée à la distance 3 doit être prise en compte.

Les questions 4 et 5 portent sur un nouveau personnage : un chien.

Les élèves devaient répondre à la question suivante :

Un chien part de la fontaine dans la direction de Tina au même moment que Tina commence à marcher. Le chien court à une vitesse de 0,75 m/s.

Remplissez le tableau ci-contre, qui indique la distance qui sépare le chien de la fontaine.

Temps t (s)	Distance (m)
0	
1	
2	
3	
3,5	

L'insertion du chien dans l'histoire de Tina va nous permettre de poser des questions intéressantes plus tard. Pour l'instant, ici, le but est de remplir un tableau qui indique la distance qui sépare le chien de la fontaine à certains moments, en sachant la vitesse du chien. Le calcul de la distance qui correspond à $t = 3{,}5$ pose un défi supplémentaire. En incluant cette question, nous invitons les élèves à réfléchir plus profondément sur le problème. Il s'agit d'une étape importante de l'unité conceptuelle.

Les élèves ont souvent senti le besoin d'imaginer la position du chien et de Tina dans l'histoire, avant de s'embarquer dans les calculs arithmétiques. C'est ce qu'on voit à la ligne 21 du dialogue suivant, où Tania fait des gestes pour indiquer, avec sa main gauche, la position du chien et, avec sa main droite, celle de Tina au moment $t = 0$.

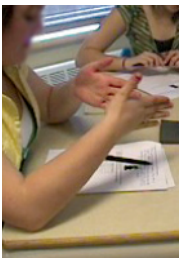
21. **Tania :** Ben, lui, il commence à la fontaine (*elle place sa main gauche devant elle, comme pour signifier la place hypothétique du chien*); puis, elle commence à 1 mètre (*elle place sa main droite devant elle, pour signifier la position de Tina*; voir Figure 4). Mais lui, il va 0,75 mètre par seconde et elle marche à 0,67 mètre par seconde.

22. **Brad :** Il part de la fontaine. So, il part de 0. Puis, Tina part de 1 [mètre].
23. **Tania :** Ouin, mais dans 0 temps, la distance était 0 mètre. Right?
24. **Brad :** Ouin.
25. **Tania :** À 1 seconde…
26. **Brad :** 0,75. Right? Et à… 2 mètres…
27. **Tania :** Mais combien de mètres est-ce qu'il a marché? Ça dit, combien de temps… comme, à 1 seconde, il a marché combien de mètres?
28. **Brad :** [Zéro virgule] 75, parce qu'il fait 0,75 dans 1 seconde... Do you get it?
29. **Tania :** Non.
30. **Brad :** OK, regarde. Au temps 0…
31. **Tania :** Oh OK. So, dans 1 seconde, il fait 0 point…
32. **Brad :** Ouin. Ensuite à 2, il a fait un point cinq zéro mètre. So, 1,50 mètre.

Les élèves ont continué à remplir le tableau par additions successives, jusqu'à $t = 3{,}5$. Le calcul de la distance qui correspond à $t = 3{,}5$ secondes a posé certaines difficultés, car il faut avoir une bonne compréhension de ce que signifie la vitesse $v = 0{,}75$ m/s. En remarquant que ses coéquipiers avaient de la difficulté, Brad a dit :

33. **Brad :** OK. 75 mètres par seconde. Ça (*en faisant référence à la décimale 0,5 dans 3,5*), c'est la moitié d'une seconde. Ça, ça serait la moitié de 75.
34. **Tania :** 75 divisé par 2 égale… 37,5.
35. **Brad :** So, il faut que tu ajoutes 37,5.
36. **Tania :** Ça ne fait pas de sens! (Car l'unité n'est pas exprimée en mètres.)
37. **Brad :** Oui… il faut que tu ajoutes 0,37.
38. **Tania :** Oh! OK.
39. **Brad :** La moitié de 75, c'est la moitié d'une seconde. 75 mètres par seconde […]
40. **Tania :** So 2,25 plus 0,37… 2,62.

Le tableau de Brad est montré à la Figure 4.



Temps t (s)	Distance (m)
0	0 m
1	0,75 m
2	1,50 m
3	2,25 m
3,5	2,62 m

Figure 4. À gauche, Tania utilise ses mains pour s'aider à comprendre le problème. À droite, le tableau de Brad.

L'abstraction accomplie ici permettrait aux élèves de continuer le tableau pour des valeurs telles que 4, 4,5, 5, 5,5, etc. Cette abstraction est encore fragile, comme l'a montré l'intervention de l'enseignant. En regardant le tableau, il a dit :

41. **Enseignant :** Avant que vous n'alliez plus loin… Vous avez fait ça (le problème 4) par addition. Tu (*en se référant à Brad*) disais que tu ajoutes 0,75, puis 0,75, puis 0,75. Est-ce que vous auriez pu faire [cela] par multiplication? Auriez-vous pu dire : 3 x 0,75?

42. **Tania :** Je ne comprends pas.

L'intervention de l'enseignant vise à aider les élèves à prendre conscience de l'existence d'une structure multiplicative derrière le tableau, structure qui sera importante, plus tard, lors de l'interprétation du coefficient de la variable t dans l'équation et de la pente dans la représentation graphique. L'idée didactique n'est pas de faire tout comprendre aux élèves d'un seul coup. Il se peut qu'ils ne comprennent pas, comme le dit Tania à la ligne 42. Peu importe. La question a déjà été posée. Elle est en fait une petite ouverture vers une compréhension qui arrivera plus tard (peut-être même un an plus tard). Il ne faut pas oublier que la compréhension en mathématiques ne se fait pas tout de suite. La compréhension, c'est un processus en général très lent. Et il faut préparer ce processus peu à peu. La question de l'enseignant n'est que le début de ce processus.

La distance entre Tina et le chien

Tina, on l'a dit, commence sa marche à 1 mètre de la fontaine. Le chien commence sa marche en même temps que Tina, mais, lui, il est à la fontaine. Que verrait un observateur? Puisque le chien va plus vite que Tina, il verrait le chien se rapprocher peu à peu de Tina. Comment varie la distance entre Tina et le chien au fur et à mesure que le temps passe? Voilà ce que nous voulions que les élèves explorent dans cette partie de la leçon.

Dans un premier temps, nous avons demandé aux élèves de calculer la distance qui sépare Tina du chien quand $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 3{,}5$ et $t = 4$ s.

En calculant ces distances, les élèves pourraient voir qu'il y a une diminution de la distance entre Tina et le chien. La question suivante demandait aux élèves de tracer le graphique. À l'aide du graphique, ils pourraient avoir une idée *visuelle* de la façon dont la distance diminue. Venait ensuite la question de trouver l'instant et la place où le chien rejoint Tina.

Les élèves disposaient déjà des éléments qui permettent de trouver la distance qui sépare Tina du chien. En effet, d'une part, les élèves venaient de faire un tableau de temps/distance de la marche du chien. D'autre part, ils avaient le graphique de la marche de Tina. Ils pouvaient combiner ces deux éléments pour en déduire la distance qui sépare Tina du chien.

Bien sûr, même en disposant déjà des éléments nécessaires, la question n'est pas évidente. Pour répondre à ces questions, les élèves devaient utiliser, *de façon vraiment pertinente*, les concepts visés par l'attente du *Curriculum*. L'abstraction apparaît ici en tant que démarche cognitive permettant de faire des liens entre ces concepts (graphique et table de valeurs).

Les élèves du groupe de Josée ont effectivement combiné les concepts précédents avec succès, même si, pour y arriver, il a fallu des échanges intéressants. Voici un extrait de leur discussion :

43. **Richard :** So, trouve la distance qui sépare Tina du chien… À 1 seconde, à 2 secondes, à 3 secondes, à 3,5 secondes et à 4 secondes. So… Si Tina…
44. **Josée :** Si Tina marche…
45. **Richard :** À 1 seconde elle est à…
46. **Josée :** …0,67 mètre.
47. **Richard :** Non, attends une minute.
48. **Josée :** Oui!
49. **Richard :** Non, à cause que Tina commence à 1 mètre. Le chien commence à 0.
50. **Josée :** Ouin, oh!
51. **Richard :** So, Tina, à 1 seconde est à 1,67, quand le chien est à 0,75.
52. **Josée :** Comment tu as trouvé ça?
53. **Richard :** Tina, quand elle part, elle part à 1 mètre de la fontaine (Figure 5, gauche). Le chien, il part à 0 (Figure 5, centre). So, il faut qu'on calcule la distance (Figure 5, droite) entre le chien et Tina.

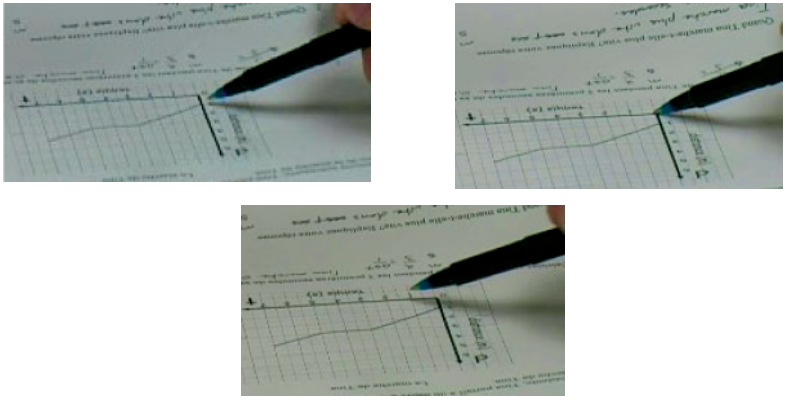


Figure 5. Trois gestes importants qui aident à associer les points du graphique cartésien aux positions de Tina et du chien.

Pour résoudre le problème, il faut coordonner les positions de Tina et du chien. À la ligne 46, Josée ne fait pas référence au graphique de Tina; elle a plutôt recours à la vitesse de celle-ci. On sait que Tina se déplace à 0,67 m/s. Josée suggère donc que, à 1 seconde, Tina se trouve à 0,67 m. À la ligne 49, Richard rappelle que Tina commence à 1 mètre; il en déduit que, à 1 seconde, Tina est à 1,67 m de la fontaine (ligne 51), alors que le chien est à 0,75 m. Mais ces données ne sont pas encore claires pour Josée (ligne 52). Richard réexplique l'idée à la ligne 53. Il place son stylo sur la feuille de Kent et signale le point (0, 1), qui correspond à la position de Tina (Figure 5, gauche). Ensuite, il signale l'origine en disant que c'est là que se trouve le chien au départ (Figure 5, centre). Avec un troisième geste qui indique le temps $t = 1$ (Figure 5, droite), il déplace son stylo verticalement pour signifier la distance et dit : « il faut qu'on calcule la distance entre le chien et Tina. » Bien sûr, il signale la distance de Tina à la fontaine; mais ce geste est purement métaphorique : il lui sert pour attirer l'attention de ses partenaires sur le calcul des distances à faire.

Les élèves ont calculé la distance qui sépare Tina du chien. Sur la Figure 6, nous montrons les réponses de deux groupes. La distance du chien à la fontaine a été tirée du tableau fait précédemment par les élèves. La distance de Tina à la fontaine a été calculée de deux façons différentes. À gauche, la distance a été calculée à partir de la vitesse de Tina (0,67 m/s). Les élèves sont partis de 1 mètre et ont ajouté successivement 0,67 mètre. À droite, les calculs ont été faits à partir du graphique de Tina, avec une erreur de lecture au temps $t = 1$. Naturellement, la lecture du graphique comporte des imprécisions. Lors de la discussion générale, l'enseignant a profité de l'occasion pour comparer les deux méthodes et a fait remarquer les avantages et les limites de chaque façon de procéder.

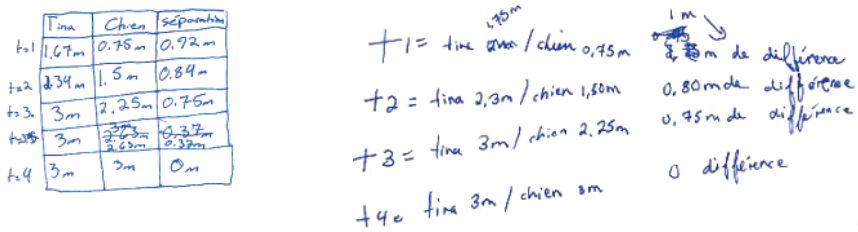


Figure 6. À gauche, les élèves ont fait un tableau de distances obtenu à partir des vitesses de Tina et du chien. À droite, un tableau obtenu à partir de la vitesse du chien et du graphique de Tina.

Les élèves font le graphique

Faire le graphique n'a pas posé de difficultés majeures aux élèves. Mais certains graphiques différaient les uns des autres. La Figure 7 montre deux graphiques différents.

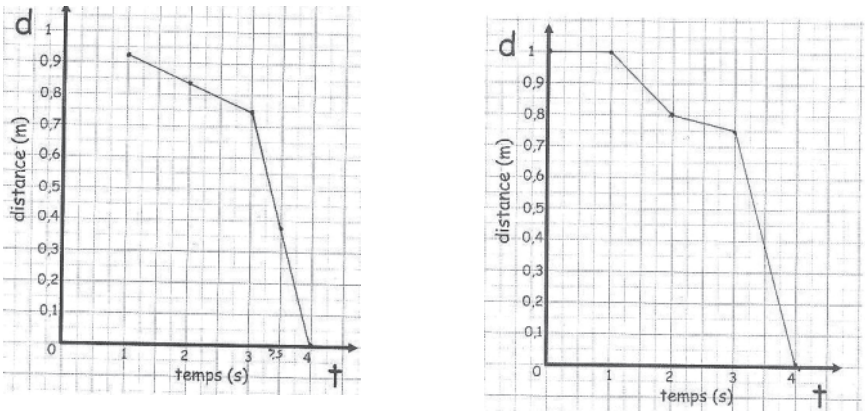


Figure 7. Deux graphiques de la distance entre Tina et le chien.

L'obtention des graphiques différents a donné l'occasion à l'enseignant de mener une discussion sur les différences. Par exemple : Que signifie le segment horizontal dans le deuxième graphique? Est-ce que ce segment décrit ce qui s'est passé la première seconde? Pourquoi le graphique est-il un graphique à lignes brisées? Pourquoi est-il plus incliné à la fin?

Notons que faire le graphique juste pour le faire n'a pas beaucoup de mérite conceptuel. Nous voulions que les élèves prennent conscience qu'un graphique peut être un outil important pour répondre à des questions pour lesquelles l'utilisation d'autres moyens serait très ardue. En d'autres termes, il s'agissait de montrer aux élèves la *pertinence* du graphique qu'ils venaient de construire. Donc, nous leur avons posé la question suivante :

> Quelle est la distance qui sépare Tina du chien à 1,5 seconde? Comment êtes-vous arrivés à votre réponse?

Bien sûr, en principe, si les élèves voulaient obtenir une réponse exacte, ils pouvaient calculer la distance de Tina à la fontaine et la distance du chien à la fontaine pour $t = 1{,}5$ à partir des vitesses. Mais le graphique offre une grande économie dans ce cas-ci.

Voici un extrait de la discussion du groupe de Brad :

54. **Diane :** Comment est-ce que tu trouves la distance?

55. **Brad :** Oh. Haha. OK, ben, il faut que tu trouves 1,5. So, tu vas à 1,5. Tu montes jusqu'à ta ligne.

56. **Diane :** Quelle ligne?

57. **Brad :** La ligne du graphique! La ligne du graphique!

58. **Diane :** Ben laquelle? Il y a comme dix lignes!

59. **Brad :** 1,5, (*il place son stylo à t = 1,5*; Figure 8, photo 1), tu continues la ligne (*il déplace son stylo vers le haut*), tu t'arrêtes là (Figure 8, photo 2; *ensuite Brad déplace son stylo vers l'axe des distances*; photo 3).

60. **Diane :** Ohhhhhhhh! OK… (*elle refait les gestes de Brad*; photo 4) Moi, j'ai comme…

61. **Brad :** C'est comme 87. C'est 0,85, à peu près.

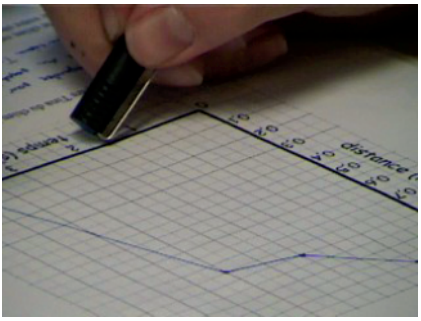


Photo 1

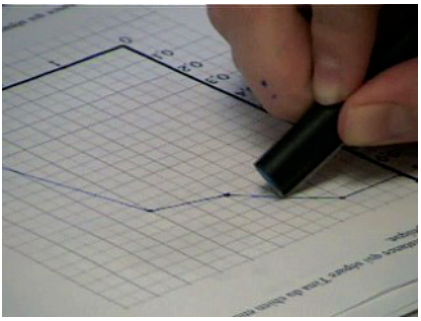


Photo 2

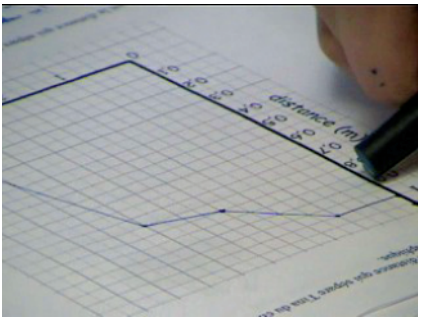


Photo 3

Photo 4

Figure 8. Photos 1 à 3 : quelques gestes remarquables faits par Brad pour expliquer la façon de lire le graphique. Photo 4, Diane refait les gestes pour trouver la réponse.

Quand le chien rejoint Tina

Une des questions importantes à l'étude était celle du moment et du point auxquels le chien rencontre finalement Tina.

En faisant le tableau de la distance qui sépare Tina du chien, les élèves avaient trouvé que la rencontre a lieu à 4 secondes. Dans le groupe de Brad, la discussion avait fini comme ceci :

62. **Tania :** Oui, il y a une différence… 3 mètres… elle est à 3 mètres, elle reste là. Les deux, les deux… So, les deux sont… So, ils se touchent, là […].

63. **Diane :** 4 [secondes]

64. **Brad :** Tina est à 3 mètres, le chien est à 3 mètres. So, il n'y a pas de différence; l'un est à côté de l'autre.

On remarque, dans cet échange, que le point spatial de la rencontre reste implicite. À la ligne 62, Tania dit que Tina est à 3 mètres, sans préciser par rapport à quel point. Le centre d'attention est sur le temps (les 4 secondes) et la différence entre les distances.

En fait, quelques instants plus tard, Brad essaie de donner une explication. Il dit :

Brad : C'est ça. OK, ouin, c'est à 4 secondes. Ils se trouvent à la fontaine. (*il lit la question encore une fois*) À quelle distance de la fontaine est-ce qu'ils se trouvent…? […] 0 mètre de la fontaine.

L'enseignant a profité de l'occasion pour faire réfléchir le groupe davantage.

65. **Enseignant :** Pourquoi est-ce que tu dis 0 mètre de la fontaine?

66. **Brad :** Parce qu'ils sont à la fontaine.

67. **Enseignant :** Où est-ce que tu vois ça? Sur le graphique (*c'est-à-dire le graphique de la distance Tina-chien*)?

68. **Brad :** Juste ici, à 4 (*il montre le point des coordonnées (*4, 0*) sur le graphique de la distance relative Tina-chien*; voir Figure 9, gauche).

69. **Enseignant :** OK. Ça représente quoi, ce graphique?

70. **Brad :** Ça représente la distance entre Tina et le chien.

71. **Enseignant :** Puis, la fontaine est où là-dedans?

72. **Brad :** [Elle] est à 0 et 4 (*il pointe encore (*4, 0*) sur le graphique de distance relative*; Figure 9, droite). Au temps 4 secondes (*il pointe (4, 0)*). La distance, c'est 0.

73. **Enseignant :** Le graphique, c'est la différence entre les deux. Des personnes qui se rapprochent…

74. **Brad :** Ils se rapprochent…

75. **Enseignant :** La fontaine n'est nulle part dans ce graphique. Oui? Non?

76. **Brad :** Non.

77. **Enseignant :** Comment est-ce que tu vas savoir à quelle distance est la fontaine? […] Tu as raison, [ils se rencontrent] à 4 secondes. Mais à quelle distance sont-ils de la fontaine?

78. **Brad :** I don't know. [Ils] sont à la fontaine. [À] 4 secondes, [ils] sont à la fontaine, parce que la distance, c'est 0.

79. **Enseignant :** (*l'enseignant prend la feuille de Tylor et montre le graphique du chien*) Ici, si tu regardes, le chien au début est ici, à la fontaine (*il signale l'origine dans le graphique du chien*). Mais avec le temps, il s'éloigne de la fontaine (*il déplace son doigt sur le graphique du chien et montre que la distance augmente*). Toi, tu es en train de dire qu'après 4 secondes il est retourné à la fontaine. Est-ce que c'est possible?

80. **Brad :** I don't know… […]

81. **Enseignant :** Est-ce que le chien s'approche ou s'éloigne de la fontaine?

82. **Tania :** Il s'éloigne [….].

83. **Brad :** OK. Umm. Oh my God! Ben, ça va comme ça (*il fait référence au fait que, sur le graphique du chien, la distance augmente*). So, il s'éloigne de la fontaine.

84. **Enseignant :** Il s'éloigne de la fontaine. Donc, après 4 secondes, il ne peut pas être à la fontaine!

85. **Brad :** Ahhh! […] Non, je [ne] suis pas capable de l'expliquer. Je comprends, mais je [ne] suis pas capable de l'expliquer. Je [ne] comprends pas cent pour cent, mais…

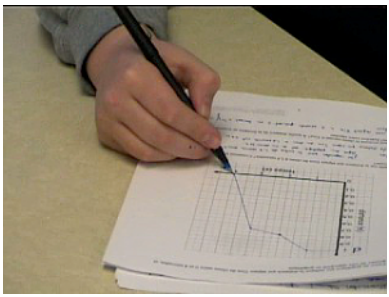


Figure 9. À gauche, Brad suggère que Tina et le chien se trouvent au point (4, 0). À droite, la distance représentée par le point signalé par Brad vaut zéro. Étant donné que, dans les marches de Tina et du chien, la fontaine avait été associée à une distance zéro, Brad conclut que la fontaine doit être là, sur ce point (4, 0).

La confusion est en fait très compréhensible. Pour la surmonter, il faut avoir présent à l'esprit que, dans les graphiques de Tina et du chien, les distances se rapportent à la fontaine. Dans le graphique montré dans la Figure 9, la distance ne se rapporte pas à la fontaine : il s'agit d'une distance relative. Dire que la distance vaut zéro veut juste dire que Tina et le chien sont l'un à côté de l'autre. Cette distance ne dit rien sur la position de la fontaine.

La question cruciale se trouve à la ligne 75 : Est-ce qu'on peut trouver la fontaine dans ce graphique? La réponse est non.

Revenons à une idée didactique déjà mentionnée précédemment. Le fait qu'il n'y a pas eu compréhension à *cent pour cent*, comme dit Brad, ne veut pas dire qu'il n'y a pas eu apprentissage. Comprendre peut prendre du temps. Des questions intéressantes ont été posées par l'enseignant, et Brad a essayé d'y répondre du mieux qu'il a pu. Brad sait qu'il y a encore des choses à comprendre. Sa compréhension comporte des tensions. Elles font partie de l'apprentissage. Une tâche importante de l'enseignement consiste à répertorier ces tensions et à y revenir périodiquement, jusqu'à ce qu'elles soient résolues. Le passage à l'abstrait exige une mise en rapport de faits particuliers, parfois contradictoires en apparence, comme on le voit dans ce passage. Sur le plan cartésien, dans les graphiques de Tina et du chien, la fontaine correspond à l'origine (ou point zéro) de l'axe de la distance. Mais ce n'est plus le cas dans le graphique de la distance entre Tina et le chien. Le passage à l'abstrait consiste ici à articuler, à un niveau conceptuel, ces relations entre distances, temps et positions.

C'est cette articulation subtile entre différentes relations qu'on retrouve dans le groupe de Josée :

86. **Richard :** À quel moment le chien rejoint-il Tina? À quelle distance de la fontaine se trouvent Tina et le chien? Justifiez votre réponse. OK.

87. **Kent :** Le chien rejoint Tina…

88. **Richard :** À 4 secondes. Ils se retrouvent après 4 secondes …

89. **Kent :** La distance est 0 mètre de la fontaine.

90. **Richard :** Non, non! Elle se retrouve à 3 mètres de la fontaine. Alors ici, c'est là… ça ici (*il montre le graphique de la distance Tina-chien*; voir Figure 10, gauche), c'est la séparation entre le chien et Tina. (*il revient à la première page de la feuille de route et, en lisant ce graphique, il trouve la distance*; voir Figure 10, droite) À 4 secondes, Tina était à 3 mètres…

91. **Kent :** OK.

Figure 10. Une coordination subtile des différents graphiques. À gauche, Richard fait référence au graphique de la distance entre Tina et le chien. À droite, il fait référence au graphique de Tina.

Une fin heureuse...

Les élèves ont par la suite abordé quelques questions au sujet de la marche de Jean. La dernière question de cette séquence d'enseignement a été la suivante :

> Si Jean commence sa marche en même temps que Tina et le chien, est-ce que Jean est loin d'eux quand le chien rejoint Tina? Expliquez votre réponse.

Le but de la question était d'amener les élèves à faire une coordination de tous les graphiques vus jusqu'à maintenant.

Une difficulté à surmonter, c'était celle de pouvoir *imaginer* le problème, c'est-à-dire de pouvoir imaginer, ne serait-ce que d'une façon générale, la marche de Tina, de Jean et du chien. Nous avons vu précédemment comment une élève a utilisé ses mains pour se donner une idée de la position du chien et de Tina par rapport à la fontaine, au moment $t = 0$ de leur marche (Figure 4). L'utilisation de gestes est en fait une procédure normale et fréquente à laquelle les élèves ont recours pour comprendre et expliquer des situations difficiles. La Figure 11 montre une séquence de gestes faits par l'enseignant pour aider un groupe à imaginer la situation.

Figure 11. L'enseignant fait une série de gestes devant un groupe d'élèves pour souligner le fait que, d'après l'histoire racontée dans le problème, le chien s'éloigne de la fontaine. À l'aide des gestes et des mots, les élèves prennent conscience de la position relative, dans l'espace et dans le temps, des objets dont parle l'histoire.

Voici la réponse d'un des groupes à la question concernant la position de Jean par rapport à Tina et au chien, quand ces deux derniers se rencontrent.

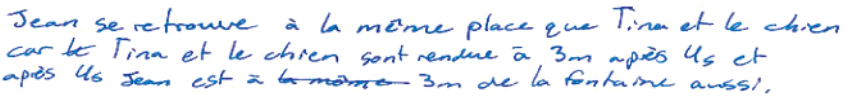

Jean se retrouve à la même place que Tina et le chien car le Tina et le chien sont rendue à 3m après 4s et après 4s Jean est à ~~la même~~ 3m de la fontaine aussi.

Figure 12. Réponse d'un groupe à la question de la position de Jean quand le chien rejoint Tina.

L'histoire finit donc par la rencontre de nos trois personnages, Tina, Jean et le chien.

Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons fait quelques commentaires au sujet de la première partie d'une séquence d'enseignement visant les concepts de tables de valeurs, de graphiques et d'équations. La séquence s'inscrit dans le cadre de la deuxième attente établie par le *Curriculum de l'Ontario* : « Utiliser une table de valeurs, une représentation graphique et une équation algébrique afin de résoudre des problèmes portant sur des relations. » (*Curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, version révisée 2005, 8e année, p. 90.)

La séquence a continué avec d'autres activités autour des graphiques dans un contexte amusant : les élèves ont reçu un petit film en fichier électronique où l'on voit une fille marcher sur le trottoir hanté. Elle avance, perd ses clés, revient les chercher, puis court à grande vitesse pour sortir du trottoir hanté. Dracula guette le passage des enfants qui osent se promener sur ce trottoir et essaye de les attraper (voir Figure 13). À l'aide d'un ordinateur, les élèves ont dû prendre des données pour construire le graphique et répondre à plusieurs questions.[14]

Photo 1

Photo 2

[14] Le film se trouve sur le DVD d'accompagnement. Il peut aussi être téléchargé dans la rubrique **Publications**, en cliquant sur **Processus d'abstraction en mathématiques**, à l'adresse suivante : www.laurentian.ca/educ/lradford.

Photo 3 Photo 4

Figure 13. Quatre photos tirées du film *Dracula*. La fille avance (photo 1), revient chercher ses clés (photo 2), puis marche à une grande vitesse (photos 3 et 4).

La séquence d'enseignement a continué par la suite avec d'autres activités mettant en vedette une équation algébrique (voir l'activité « La fenêtre de Matthieu » en annexe).

Les activités rencontrent les éléments d'une leçon modèle suggérés au chapitre 2, à savoir :

Les leçons :

a) partent du savoir de l'élève;

b) sont intéressantes du point de vue de l'élève;

c) font appel au matériel de manipulation ou à la technologie;

d) sont centrée sur des problèmes qui mobilisent les concepts mathématiques visés à des niveaux de profondeur adéquats;

e) ont une *unité conceptuelle* qui favorise le passage à l'abstrait;

f) présentent aux élèves des occasions de réfléchir à plusieurs niveaux d'abstraction;

g) offrent un espace de réflexion et d'échange en favorisant le travail en petits groupes.

Les extraits des discussions présentés ici entre les élèves et entre les élèves et l'enseignant donnent une idée du cheminement conceptuel des élèves. Ces extraits donnent également une idée de la manière dont l'enseignante ou l'enseignant peut appuyer l'élève dans son cheminement conceptuel. Dans le chapitre 2, nous avons insisté sur le besoin de présenter des leçons dont les questions s'organisent autour d'une *unité conceptuelle* qui assure un niveau progressif de difficulté. La séquence d'enseignement discutée ici montre les avantages d'une telle unité conceptuelle.

Il est clair que les élèves ne se situent pas tous au même niveau conceptuel. Mais le fait que les questions étaient intéressantes a fait en sorte que même ceux et celles qui éprouvaient des difficultés ont essayé de continuer à réfléchir et à contribuer aux discussions du groupe.

Les discussions générales de l'enseignant, où la solution aux problèmes était discutée par toute la classe, ont offert une occasion pour niveler, autant que possible, les apprentissages.

Le chapitre suivant permet d'approfondir les principes didactiques sous-jacents aux leçons qui favorisent l'engagement de l'élève dans des processus d'abstraction.

Postscriptum

La mise à l'essai des leçons discutées dans ce chapitre a eu lieu au mois de mai et au mois d'avril 2007. La leçon a été reprise en 2008, avec une nouvelle classe de 8e année. La classe comptait un plus grand nombre d'élèves en 2008, de sorte que l'enseignant a apporté des modifications intéressantes, que nous résumons ci-dessous.

La compétition de la marche s'est faite dans la salle de classe. Une station expérimentale a été placée dans un coin et elle contenait des jouets que les élèves devaient déplacer sur une piste qui modélisait la fontaine et l'espace de la marche.

Avant d'aller à la station expérimentale, les élèves pouvaient s'exercer à l'aide de jouets et d'une piste similaire (voir Figure 14).

Au moment de l'essai final, quand le groupe était prêt, il allait à la station expérimentale. Les élèves devaient faire avancer et reculer les figurines qui représentaient Jean et Tina selon leur interprétation des graphiques et expliquer leur démarche à l'enseignant. Celui-ci donnait des points au groupe selon l'exactitude et la cohérence des interprétations.

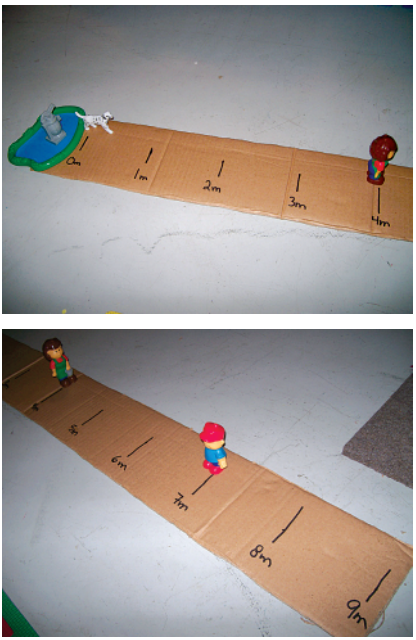


Figure 14. Deux photos du matériel didactique utilisé par Alain Girouard, enseignant de 8e année, pour aider ses élèves à mieux comprendre la position des personnages du problème de la marche.

Mentionnons aussi que ce matériel de manipulation a beaucoup aidé à visualiser la position relative de Jean, Tina et le chien dans les autres problèmes.

L'enseignant a construit de grandes figures qu'il a placées sur le tableau pour discuter avec toute la classe des différentes solutions proposées par les groupes.

Lectures supplémentaires

Arzarello, F., and O. Robutti (2001). "From body motion to algebra through graphing", in H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J.Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, vol. 1, Australia, The University of Melbourne Press, p. 33-40.

Disessa, A., D. Hammer, B. Sherrin and T. Kolpakowski (1991). "Inventing graphing: Meta-reprensentational expertise in children", *Journal of Mathematical Behavior, 10*, p. 117-160.

Robutti, O. (2006). "Motion, technology, gesture in interpreting graphs", *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *13*(3), p. 117-126.

CHAPITRE 5

Les détectives et les suspects : un problème de modélisation mathématique

Le succès dans la modélisation mathématique repose, en grande partie, sur la possibilité d'exprimer, de façon cohérente, les divers éléments qui interviennent dans le phénomène modélisé. Ce qui rend l'expression du phénomène cohérente est précisément sa description à partir d'un *point de référence commun*. Dans un plan cartésien, ce point est l'*origine*, c'est-à-dire le point de coordonnées (0, 0).

Le concept de point d'origine (0, 0) du plan cartésien est en fait une des « grandes idées mathématiques ». Historiquement, ce concept n'a commencé à être formé qu'au 17e siècle par de grands mathématiciens tels que René Descartes et Pierre de Fermat, mais sa mise au point définitive, telle que nous le connaissons aujourd'hui, a été longue et pénible. Ce concept donne son caractère systémique au plan cartésien.

Dans ce contexte, il n'est guère surprenant que les élèves éprouvent des difficultés importantes à comprendre le sens du concept de point d'origine du plan cartésien. Le chapitre précédent nous a permis déjà de voir certaines de ces difficultés. Les surmonter constitue une étape importante dans le développement de la pensée mathématique de l'élève. Cette étape ne se franchit pas d'un seul coup. D'où la nécessité d'avoir recours à des activités qui vont permettre à l'élève d'arriver à une compréhension adéquate de ce concept mathématique incontournable.

C'est dans cet ordre d'idées que nous avons élaboré et mis en place une série d'activités de difficulté croissante dans une classe de 9e année théorique.[15] Les activités satisfont des attentes appartenant à plusieurs domaines, dont les relations et la géométrie analytique.

Parmi les attentes visées se trouvent les suivantes :

Domaine « relations » :

L'élève doit pouvoir :

- démontrer une compréhension des caractéristiques d'une fonction affine;
- analyser et interpréter des situations à l'aide de fonctions affines. (*Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, version révisée 2005, 9e et 10e année, p. 29).

Domaine « géométrie analytique » :

L'élève doit pouvoir :

- interpréter l'équation d'une droite dans le plan cartésien pour déterminer ses caractéristiques;
- résoudre des problèmes relatifs aux droites. (*Le curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, version révisée 2005, 9e et 10e année, p. 32).

En harmonie avec le cadre conceptuel résumé dans les deux premiers chapitres, les activités font appel au travail en petits groupes et au matériel de manipulation. En particulier, ces leçons utilisent le CBR.

[15] Les activités se trouvent en annexe.

L'activité de la première journée est divisée en plusieurs problèmes.

Le but du premier problème est de permettre à l'élève de se familiariser avec le CBR. Les élèves doivent reproduire, au moyen de mouvements corporels, quelques graphiques, dont ceux montrés à la Figure 1.

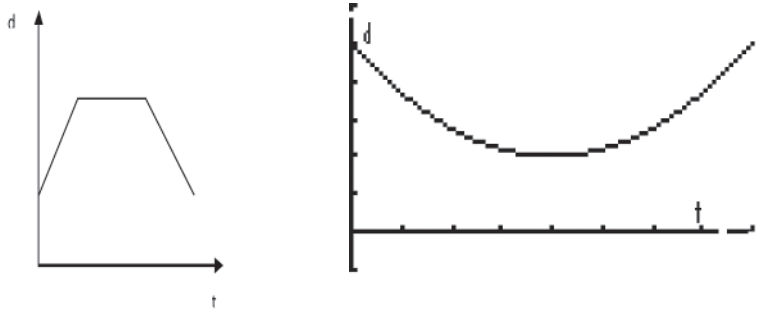


Figure 1. Deux graphiques que les élèves devaient reproduire à l'aide d'un CBR et d'une calculatrice à affichage graphique.

Le but du problème 2 est de permettre aux élèves de se rendre compte que le graphique d'un même phénomène change, selon le point d'origine choisi. On place une auto entre deux CBR, tel qu'il est indiqué à la Figure 2 (dans notre cas, nous avons utilisé une Jeep Barbie). On demande aux élèves de prédire l'allure du graphique qui est produit à l'aide de chaque CBR lorsque la voiture se dirige du point A au point B, à une vitesse constante. Par la suite, les élèves font l'expérience et ils discutent de l'exactitude de leurs prédictions.

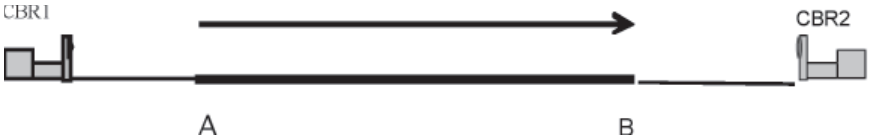


Figure 2. Une auto, placée au point A, est activée en même temps que deux CBR. Elle se déplace à une vitesse constante. Les élèves doivent prédire l'allure : (1) du graphique qui est produit à l'aide du CBR1 et (2) du graphique qui est produit à l'aide du CBR2, lorsque la voiture se dirige du point A au point B.

Alors que le CBR1 voit l'auto s'éloigner, le CBR2 voit l'auto s'approcher. Les graphiques sont donc différents, même si le phénomène est le *même*. La raison pour laquelle ils sont différents est que le point d'origine du plan cartésien (0, 0) fait référence à deux points différents : dans le premier cas, il renvoie aux distances mesurées depuis le CBR1; dans le deuxième cas, il renvoie aux distances mesurées depuis le CBR2. Le phénomène est le même, mais sa *description* est différente, car le phénomène est « vu » à partir de points de repère différents.

Ce problème est suivi du problème 3, un problème un peu plus complexe que le précédent : au problème 3, l'auto part du point A et se dirige au point B, mais une fois arrivée au point B, l'auto s'immobilise pendant 2 secondes et puis recule, toujours en ligne droite, jusqu'au point de départ A.

La Figure 3 montre un moment de la phase expérimentale du problème 3.

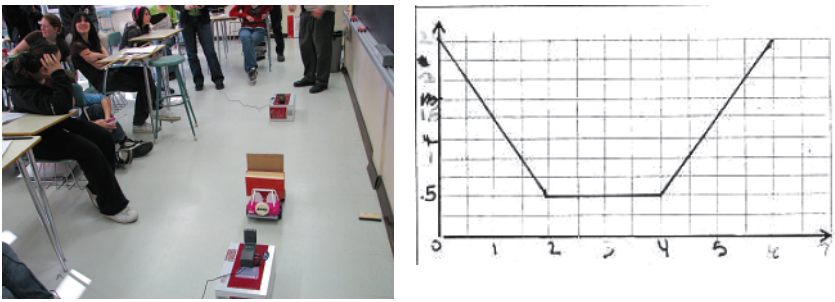


Figure 3. À gauche, à l'aide d'une télécommande, l'auto est actionnée par une élève. À droite, le graphique produit par un groupe d'élèves. Ce graphique correspondrait au CBR2, d'après l'énoncé du problème.

Ces problèmes ainsi que d'autres (voir en annexe) servent de préparation au problème de fond de la séquence d'enseignement : le problème des suspects et des détectives. Dans notre expérimentation, ce problème a été abordé le lendemain. Dans le reste du chapitre, nous ferons une analyse de ce problème et de sa résolution par les élèves.

Les suspects et les détectives

Ce problème raconte une histoire qui met en action deux détectives et deux suspects. Voici l'histoire :

> Depuis quelques jours, les détectives André et Tina surveillent deux suspects, Pierre et Marthe. Ils savent que Marthe va remettre à Pierre une information secrète contenue dans une enveloppe. Un jour qu'un brouillard dense s'est abattu sur la ville, les suspects en profitent pour mener à terme leur opération. Ils se trouvent à 7 m de distance l'un de l'autre.
>
> Pour éviter de se faire remarquer, André et Tina décident de ne pas bouger. André est placé derrière Pierre, à 3 m de lui, et pointe un CBR dans la direction de Pierre. Tina est placée derrière Marthe, à 2 m d'elle, et pointe un CBR dans la direction de Marthe. Pierre et Marthe commencent à marcher en même temps, l'un vers l'autre, comme il est indiqué sur le dessin. Au moment où les suspects commencent à marcher, les détectives activent leur CBR. Ils veulent savoir où aura lieu exactement la remise de l'enveloppe.

L'histoire était accompagnée du dessin montré à la Figure 4.

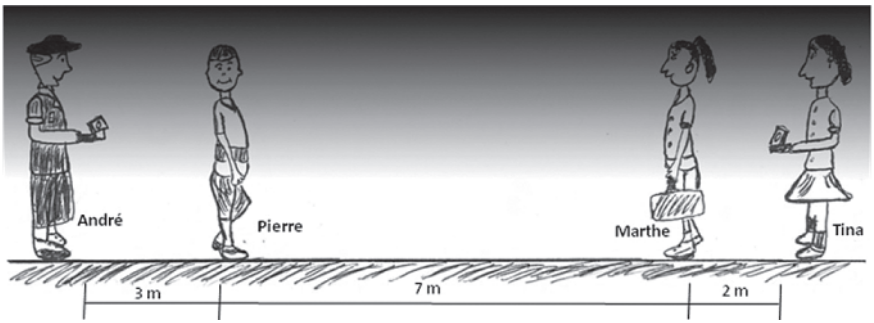
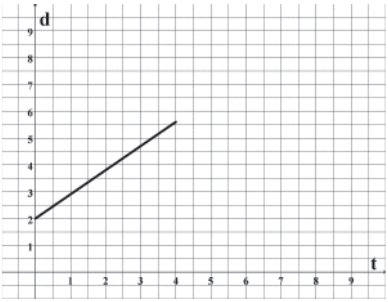


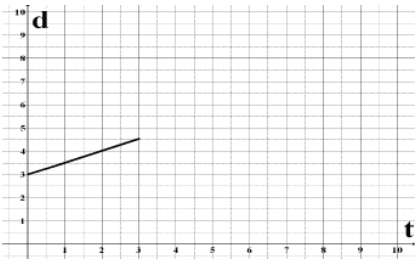
Figure 4. Dessin qui accompagnait l'histoire des détectives.

On donnait aux élèves les graphiques obtenus par chaque CBR. Ces graphiques sont les suivants :



t (s)	*d* Marthe (m)
0	2,0
4,0	5,6

Graphique du déplacement de Marthe, d'après le CBR de Tina.



t (s)	*d* Pierre (m)
0	3,0
3,0	4,53

Graphique du déplacement de Pierre, d'après le CBR d'André.

On a demandé aux élèves de calculer les équations de ces droites affines, ce qu'ils ont fait sans difficulté (voir Figure 5).

$d = at + b$

$a = \frac{4,53 - 3,51}{3 - 1}$

$= \frac{1,02}{2}$

$= 0,51$

$b = 3$

$d = 0,51t + 3$

$d = at + b$

$a = \frac{5,6 - 4,7}{4 - 3}$

$= \frac{0,9}{1}$

$= 0,9$

$b = 2$

$d = 0,9t + 2$

Figure 5. Réponse d'un groupe d'élèves. À gauche, l'équation de la droite affine de Pierre, la distance étant mesurée à partir du CBR d'André. À droite, l'équation de la droite affine de Marthe, la distance étant mesurée à partir du CBR de Tina.

L'histoire continuait ainsi :

> Les détectives veulent savoir l'endroit et le moment précis où la remise de l'enveloppe secrète a eu lieu. Ils décident alors de mettre leur graphique ensemble (voir ci-dessous).
>
> Peut-on trouver, à partir de ces graphiques, le moment et l'endroit où Pierre a reçu l'enveloppe? Justifiez votre réponse.

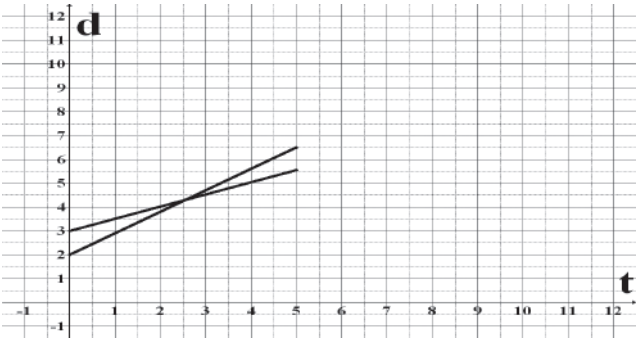


Figure 6. Plan cartésien montrant une superposition des graphiques de Pierre et de Marthe.

La réponse intuitive est que le point d'intersection des graphiques correspond au point de rencontre des suspects. Est-ce que c'est bel et bien le cas? Voyons de plus près le problème.

Remarquons que le temps qui correspond au point d'intersection des graphiques est environ de 2,5 s. La distance est autour de 4,2 m. Cela signifie que Pierre se trouve à 4,2 m du CBR d'André et que Marthe se trouve à 4,2 m du CBR de Tina. Mais, est-ce que Pierre et Marthe sont l'un à côté de l'autre à 2,5 s? La réponse est non.

Si nous plaçons Pierre à 4,2 m du CBR d'André et Marthe à 4,2 m du CBR de Tina, nous obtenons ce qui est montré à la Figure 7 ci-dessous :

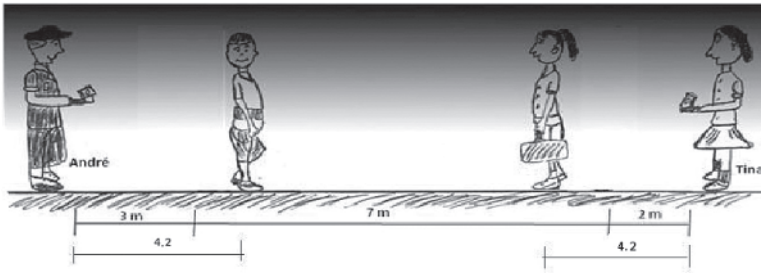


Figure 7. Pierre et Marthe quand $t = 2{,}5$ s (l'échelle des dessins est approximative).

À $t = 2{,}5$ secondes, les deux suspects se sont rapprochés, mais ils ne sont pas encore l'un à côté de l'autre. Ils sont encore loin!

Cette situation semble bizarre de prime abord, mais elle s'explique facilement si l'on tient compte du sens des origines de chaque plan cartésien.

La calculatrice de Tina donne un graphique qui mesure la distance entre Marthe et le CBR de Tina. La calculatrice d'André donne un graphique qui mesure la distance entre Pierre et le CBR d'André. Donc, les points d'origine des plans cartésiens n'ont pas le même sens. L'un renvoie à un CBR, l'autre à l'autre CBR.

Que signifie alors le point d'intersection des deux droites du plan cartésien montré à la Figure 6? Le point d'intersection (2,5, 4,2) signifie simplement qu'à $t = 2{,}5$ secondes, chacun des suspects se trouve à la même distance (une distance de 4,2 mètres) du détective qui le surveille.

Or, même si le point d'intersection des graphiques de la Figure 6 ne correspond pas au point de rencontre des suspects, on peut trouver le point de rencontre à l'aide de ces graphiques. En effet, puisque les deux CBR sont à une distance *totale* de 12 m, les suspects vont se rencontrer quand la somme de leur distance sera égale à 12 mètres (voir Figure 8).

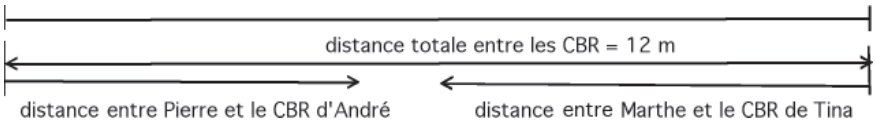


Figure 8. Le point où les suspects sont l'un à côté de l'autre est exactement le point où la somme des distances est égale à 12 m.

Dans les graphiques de Pierre et de Marthe donnés à la Figure 6, on peut voir que, à $t = 5$ secondes, la distance parcourue par André est de 5,5 m environ; celle de Tina est de 6,5 m. La somme est de 12 m environ. Cela veut dire que les suspects se rencontrent à 5 secondes environ et ils se trouvent à 5,5 m du CBR d'André.

Le but de l'activité était d'amener les élèves à réfléchir, de manière critique, à ce que signifie l'origine (0, 0) du plan cartésien. En élaborant la séquence didactique, notre équipe de recherche s'attendait à ce que les questions précédentes amènent les élèves à une contradiction. Les élèves penseraient que les suspects se trouveraient l'un à côté de l'autre à t = 2,5 environ. Ensuite, ils se rendraient compte que ce n'est pas le cas. Cette contradiction serait surveillée de près par l'enseignant. Celui-ci apporterait des suggestions aux élèves afin de surmonter la contradiction. Cette démarche fait partie d'une stratégie de création d'une *zone proximale de développement* (voir le chapitre 2). La compréhension du concept de l'origine (0, 0) du plan cartésien serait le résultat de la résolution de cette contradiction, avec l'aide éventuelle de l'enseignant.

Avant d'aller plus loin, voyons comment les élèves ont essayé de résoudre le problème. Nous allons nous centrer sur la discussion qu'ont eue deux groupes d'élèves.

La démarche des élèves

Le premier groupe auquel nous ferons référence est celui de Cécile, Bianca et Paul.

Comme il était prévu, les élèves ont interprété le point d'intersection comme le point de rencontre des suspects. En lisant l'information des graphiques, ils ont retenu des valeurs approximatives (t = 2,3 s et d = 4 m). Or, au lieu d'interpréter cette distance de 4 m comme la distance entre Pierre et le CBR d'André et comme la distance entre Marthe et le CBR de Tina, ils l'ont interprétée comme la distance *parcourue à partir du point de départ de chaque suspect*.

Cependant, Cécile s'est rendu compte qu'il y avait un problème avec une telle interprétation. Voici un extrait de leur discussion :

1. **Cécile :** Si les deux marchent 4 mètres. Alors ensemble, ils ont parcouru 8 mètres, mais il y a seulement 7 mètres de séparation [entre eux]!
2. **Bianca :** Euh…
3. **Paul :** Mets la ligne quelque part!
4. **Bianca :** Oui…
5. **Cécile :** Je vais la mettre au milieu [de la distance de 7 mètres]!

Bien sûr, cette solution était une façon simple de résoudre la contradiction. D'ailleurs, les élèves n'étaient pas très convaincus, mais ils ne trouvaient pas de réponse plus satisfaisante. Ils ont alors appelé l'enseignant. Quand celui-ci est arrivé, il a examiné les réponses des élèves. Afin d'engager la discussion et d'inviter les élèves à continuer à réfléchir, il a dit :

6. **Enseignant :** …vous dites que le temps auquel Pierre passe l'enveloppe est 2,3 secondes et l'endroit est 4 mètres. 4 mètres à partir de qui? De quoi? Vous avez écrit 4 mètres, n'est-ce pas? C'est comme 4 mètres entre les deux personnes? Où vous avez-vous pris 4 mètres?
7. **Bianca :** Euh, Euh.
8. **Enseignant :** Qu'est-ce que ça veut dire sur le graphique? (*il pointe l'intersection des droites*)
9. **Paul :** 4 mètres.
10. **Enseignant :** Regardons une ligne à la fois. Ça (*il pointe le graphique de Marthe*), c'est Marthe. Marthe est la ligne du bas, d'accord? Vous êtes d'accord avec ça? (*il pointe les deux graphiques successivement*) Ça, c'est Marthe. Ça, c'est Pierre? (voir Figure 9).
11. **Cécile :** Oui.
12. **Enseignant :** Dessine une ligne là (*sur le dessin où l'on voit les suspects et les détectives*) où Marthe serait à 4 mètres. Êtes-vous capables de me placer Marthe, là (*sur le dessin*), à 4 mètres?
13. **Cécile :** En avant? (*elle pointe le milieu du segment défini par les positions initiales de Pierre et Marthe*)
14. **Enseignant :** Tu la places là? (*en faisant référence au point indiqué par Cécile*)
15. **Cécile :** Oui.
16. **Enseignant :** Où est le 4 mètres? Trace-moi une ligne horizontale qui représente le 4 mètres. Comme ici, on te dit, c'est 2 mètres. (*il signale la distance entre Tina et Marthe*) Ça, c'est 7 mètres. (*il signale la distance entre Pierre et Marthe*; voir Figure 9) Où est le 4 mètres? (*Cécile change d'avis et trace la ligne horizontale à partir de Tina; en s'adressant aux autres élèves, l'enseignant dit*) Est-ce que vous êtes d'accord?

À la ligne 6, l'enseignant pose la question cruciale : « 4 mètres à partir de qui? de quoi? » Par cette question, il attire l'attention des élèves sur le fait qu'il faut considérer non seulement la valeur de la distance, mais aussi le point à partir duquel on mesure la distance. Or, comme il arrive souvent en salle de classe, une bonne question n'est pas suffisante pour assurer l'apprentissage. Une bonne question peut être une condition nécessaire à l'apprentissage, mais souvent elle n'est pas suffisante. L'apprentissage exige beaucoup plus que de bonnes questions. Ici, le problème central est d'articuler le contexte *concret* où se situe l'histoire (Figure 4) et le contexte *abstrait* de la signification mathématique des graphiques. Pour assurer l'articulation, lors de sa discussion avec les élèves, l'enseignant pointe tantôt les graphiques, tantôt les distances du dessin qui accompagne l'histoire.

C'est grâce à ces gestes que l'enseignant fait les liens nécessaires à la compréhension des distances contenues dans le problème (voir Figure 9).

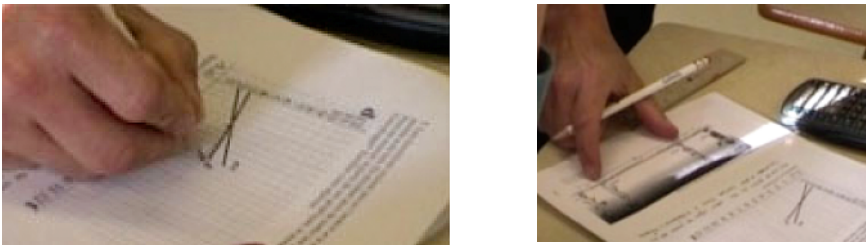


Figure 9. À gauche, l'enseignant pointe les graphiques; à droite, l'enseignant indique la distance initiale de 7 mètres entre Pierre et Marthe.

À la ligne 12, l'enseignant demande à Cécile de déterminer la distance de 4 mètres sur le dessin. On ne peut répondre à cette question que si l'on rend explicite le point à partir duquel on mesure la distance. Mais c'est justement là que réside la difficulté des élèves. Alors, Cécile pose à son tour la question à l'enseignant :

17. **Cécile :** Est-ce qu'elle commence de là (*elle pointe Marthe*) ou de là? (*elle pointe Tina*)
18. **Enseignant :** Ça, c'est une excellente question! Elle commence de là ou là? (*il pointe Tina, puis Marthe*) Paul? Où est-ce qu'elle commence?... Ben, moi je te demande, le 4 là, (*4 mètres de Tina que Cécile avait tracés précédemment*) est-ce qu'il commence de Marthe ou de Tina?
19. **Paul :** [De] Tina.
20. **Cécile :** [De] Tina.
21. **Enseignant :** Tina? Pourquoi commencerait-il de Tina et non pas de Marthe ou de Marthe et non pas de Tina? (voir Figure 10)

Figure 10. L'enseignant fait deux gestes en discutant de la question des 4 mètres : les 4 mètres, commencent-ils de là (position de Marthe; photo à gauche) ou de là (position du CBR de Tina; photo à droite)?

La personne qui se déplace est Marthe. Mais Tina joue aussi un rôle important. Elle est le point de référence à partir duquel est mesurée la distance de Marthe. C'est l'enseignant qui mentionne Tina explicitement à la ligne 18. Par là, Tina entre dans l'univers de discours des élèves.

Naturellement, l'enseignant n'est pas seulement à la recherche des bonnes réponses. Avant tout, il est à la recherche des raisonnements mathématiques sophistiqués. Donc, pour s'assurer de la compréhension des élèves, à la ligne 21, il demande s'il faut commencer les 4 mètres de Tina et non pas de Marthe ou de Marthe et non pas de Tina.

Quelques moments plus tard, l'enseignant revient sur la discussion du point par rapport auquel la distance de Marthe est mesurée. En faisant référence à Marthe, l'enseignant dit :

22. **Enseignant :** A-t-elle marché 4 mètres?
23. **Cécile et Bianca :** Ouen!
24. **Enseignant :** Où a-t-elle commencé?
25. **Bianca :** Euh… 2 mètres en avant de Tina.
26. **Enseignant :** C'est ça. Là (*sur la feuille, il indique le point de départ*). Donc, elle n'a pas marché 4 mètres!
27. **Paul :** C'est 2 [mètres].
28. **Enseignant :** Elle a marché 2 mètres!
29. **Bianca :** Oh! OK…
30. **Enseignant :** C'est ça. Le lecteur [c'est-à-dire le CBR]… lit la distance entre les 2 [personnes], entre Tina et Marthe.

Pour l'enseignant, c'était clair que Paul et Bianca avaient compris. Mais, est-ce que Cécile avait compris? À la suite de l'échange ci-dessus, il lui pose la question. Cependant, Cécile insiste sur le fait que la distance de Marthe se mesure à partir du point de départ de celle-ci. Alors, Bianca intervient et dit : « Non, ton point de départ est là (*elle signale Tina*), parce que le CBR est là (*et elle encercle le CBR de Tina*) » (voir Figure 11; à gauche).

Neuf secondes plus tard, l'enseignant refait le geste de Bianca et encercle, lui aussi, le CBR de Tina. Lorsqu'il encercle le CBR, il dit : « Vu que le CBR mesure [la distance], quand elle [Marthe] est rendue à 4 mètres, c'est 4 mètres de là » (voir Figure 11; droite).

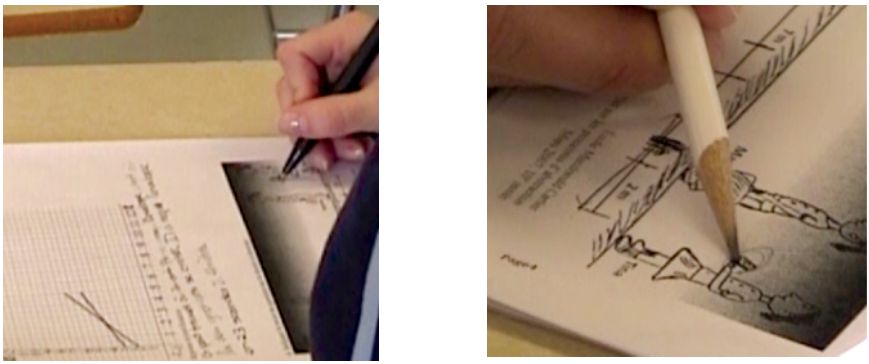


Figure 11. À gauche, Bianca indique le CBR pour expliquer l'origine à partir de laquelle la distance de Marthe est mesurée. À droite, l'enseignant refait le geste de Bianca.

Pour vérifier encore une fois la compréhension de Cécile, l'enseignant lui a demandé d'identifier les 4 mètres dont il avait été question plus tôt. On se rappellera que Cécile avait indiqué le milieu du segment entre Pierre et Marthe. Cette fois-ci, Cécile a dessiné les 4 mètres à partir de Tina (voir Figure 12). Ensuite, l'enseignant demande : « D'où faut-il mesurer la distance de 4 mètres de Pierre? ».

Cette fois-ci, Cécile a rapidement dessiné les 4 mètres à partir de l'autre CBR (voir Figure 12).

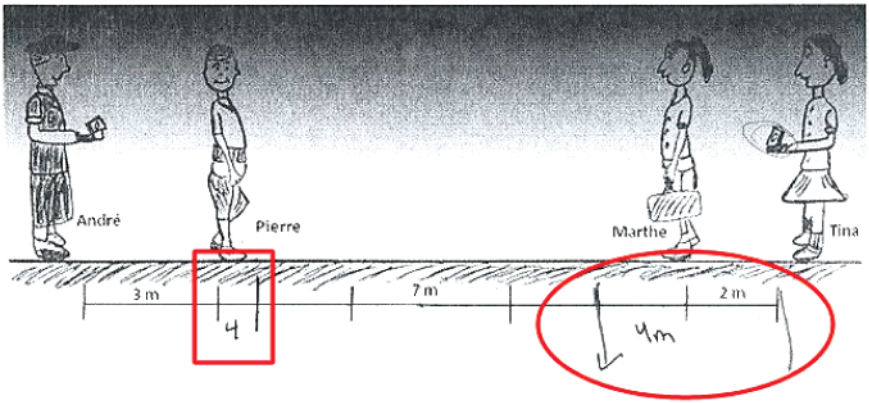


Figure 12. Cécile a indiqué l'endroit qui correspond à la distance de 4 mètres qui sépare Pierre de son origine (voir l'encadré, à gauche) et l'endroit qui correspond à la distance de 4 mètres qui sépare Marthe de son origine (voir l'ovale, à droite). Il est clair maintenant que, lorsque Pierre et Marthe se trouvent à 4 mètres de leur origine respective, ils sont encore loin l'un de l'autre.

Nous avons analysé en détail ce passage, car il montre comment, avec l'aide de l'enseignant, les élèves ont pris progressivement conscience des deux origines mathématiques auxquelles sont liées les distances dont on parle dans le problème. Cette prise de conscience leur a permis de surmonter la contradiction à laquelle ils s'étaient heurtés. Les raisons pour lesquelles l'intersection des droites ne correspond pas au point où Pierre et Marthe se trouvent l'un à côté de l'autre sont maintenant claires.

La discussion générale

Dans l'enseignement des mathématiques, il est important d'organiser, à des moments clés, des discussions générales afin d'assurer un échange d'idées entre les élèves. Les discussions générales sont aussi une occasion que l'enseignant peut choisir pour souligner des points importants sur les concepts en cours d'apprentissage.

C'est ainsi que, le lendemain, l'enseignant a commencé la leçon avec une simulation du problème des détectives. Cette simulation donnerait l'occasion aux élèves d'exprimer leurs idées. Il a demandé à quatre élèves de se placer devant le tableau. Il a remis un CBR aux élèves qui ont joué le rôle de Tina et d'André. Les élèves qui ont joué le rôle de Pierre et de Marthe se sont placés aux endroits indiqués dans l'énoncé du problème (voir Figure 13).

Figure 13. Au haut, de gauche à droite, on voit les élèves qui ont joué le rôle de Pierre, Marthe et Tina (à gauche de Pierre, il y a un élève qui a joué le rôle d'André, mais il n'est pas visible sur la photo). Au bas, les suspects marchent lentement l'un vers l'autre, jusqu'à la rencontre.

Pendant que les suspects marchaient l'un vers l'autre, le professeur a fait voir ce qui arrive à leur distance respective. Il leur a demandé d'arrêter à 4 mètres et la classe a pu voir qu'ils étaient loin l'un de l'autre.

Les élèves ont répété la simulation et, cette fois-ci, en s'aidant des graphiques dessinés au tableau, au fur et à mesure que chaque suspect se déplaçait, l'enseignant a montré les points sur les graphiques correspondants. La discussion s'est terminée par l'idée que le point d'intersection des droites ne correspond pas à la rencontre des suspects.

Comme nous l'avons dit précédemment, le concept de point d'origine (0, 0) du plan cartésien constitue une des grandes idées mathématiques enseignées

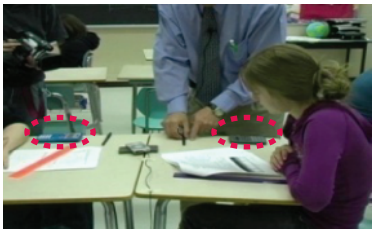
au cycle intermédiaire et sa compréhension est très importante. Elle est une idée centrale dans les processus d'abstraction. À la suite de la discussion générale, afin d'amener les élèves plus loin dans l'acquisition de cette « grande idée », l'enseignant a posé la question à être discutée ce jour-là :

> « Peut-on trouver une autre méthode graphique pour déterminer l'endroit et le temps précis où la remise de l'enveloppe secrète a eu lieu? »

La réponse repose sur le choix d'une origine *unique et commune* qui peut renvoyer autant à la distance de Marthe qu'à celle de Pierre.

À la recherche d'une origine commune

En discutant avec un autre groupe d'élèves, l'enseignant a utilisé deux calculatrices pour simuler les CBR et deux stylos pour simuler les suspects (voir Figure 14, gauche). Après avoir fait la simulation (qui était similaire à celle faite par les élèves devant la classe), il a demandé : « Que pensez-vous si, au lieu d'avoir deux CBR, on en utilise un? » Il s'est débarrassé d'une calculatrice et a gardé celle qui correspondait à André (voir Figure 14, droite). Il a simulé lentement encore une fois la marche des suspects, en demandant aux élèves de dire ce qui arrive aux distances, toutes les deux étant mesurées cette fois-ci par rapport au même CBR (celui qui se trouve sur les photos, vers la gauche).



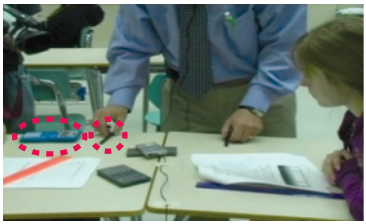


Figure 14. À gauche, les calculatrices (encerclées en pointillé) jouent le rôle des CBR. À droite, une calculatrice est enlevée. Toutes les distances sont maintenant mesurées à partir de la calculatrice à gauche. À droite, l'enseignant déplace lentement les stylos; les élèves observent que la distance de l'un augmente, alors que la distance de l'autre diminue.

Les élèves ont pu *voir* que la distance qui sépare Pierre (simulé par le stylo à gauche) et le CBR était petite au départ et qu'elle augmentait au fur et à mesure que le temps s'écoulait. Par contre, la distance entre le CBR et Marthe (celle-ci simulée par le stylo à droite) était grande au départ, mais diminuait dès que Marthe commençait à marcher.

Les élèves n'ont pas eu de difficulté à faire le graphique de Pierre. Ce graphique était déjà donné. Il fallait seulement réinterpréter les caractéristiques de la fonction affine qui le représente dans le contexte du problème : l'ordonnée à l'origine signifie la distance entre Pierre et le CBR d'André. La pente correspond à la vitesse à laquelle Pierre marche.

Pour tracer le nouveau graphique de Marthe, il fallait commencer par trouver l'ordonnée à l'origine. Or, l'ordonnée à l'origine est définie maintenant par la distance initiale entre Marthe et le CBR d'André. Elle vaut donc 10 m.

La Figure 15 contient les réponses fournies par deux groupes d'élèves.

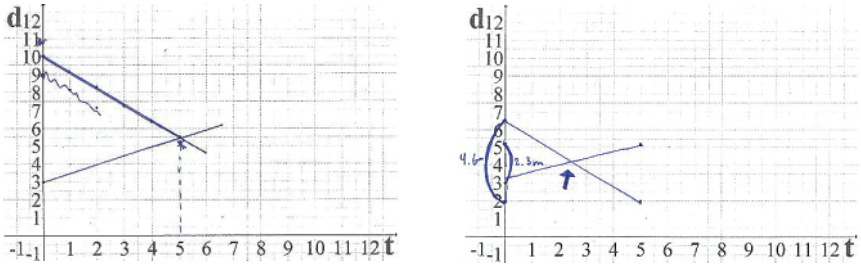


Figure 15. Deux réponses au problème du point de rencontre de Pierre et Marthe.

Pour trouver la pente dans le graphique à gauche, les élèves ont pris en compte les calculs effectués auparavant (voir Figure 5). Leur explication a été la suivante :

Si nous mesurons la distance à partir du CBR d'André, Marthe est à 10m (7+3). Nous avons soustrait 0,9 à chaque seconde car Marthe avance à 0,9m/s. Pierre et Marthe se rencontre à une distance de 5,5m d'André après 5 secondes.

Une différence essentielle entre les graphiques de la Figure 15 est que, dans le graphique à gauche, l'ordonnée à l'origine est cohérente avec l'histoire. Dans le graphique à droite, par contre, l'ordonnée à l'origine de la fonction affine ne l'est pas. En fait, dans le deuxième cas, les élèves savent que la droite de Marthe doit descendre. Ils font alors pivoter la droite de Marthe au point de rencontre (4, 2,3) trouvé précédemment (point qui, comme nous l'avons vu, ne correspond pas à la rencontre réelle des suspects). La valeur du *temps* de rencontre $t = 2{,}3$ devient une valeur de *distance*; les élèves multiplient par deux cette valeur 2,3, ce qui donne 4,6 m, et c'est cette valeur qui est prise comme ordonnée à l'origine. Le passage à un niveau d'abstraction plus élevé, nous l'avons dit dans le premier chapitre, demande l'articulation de plusieurs symboles et la prise en compte de leur sens. Ici, le sens est malheureusement perdu.

Vers la fin de la leçon, l'enseignant a discuté avec la classe des graphiques produits par certains groupes, ce qui a aidé les élèves à améliorer la compréhension de la modélisation effectuée et à reconsidérer le sens des caractéristiques d'une fonction affine.

Le devoir

Pour approfondir leur compréhension, les élèves ont reçu un devoir. Le devoir demandait aux élèves de résoudre le même problème; mais, cette fois-ci, l'origine n'était pas définie par le CBR d'André : l'origine était définie par le CBR de Tina (voir le devoir en annexe).

La Figure 16 contient deux réponses typiques.

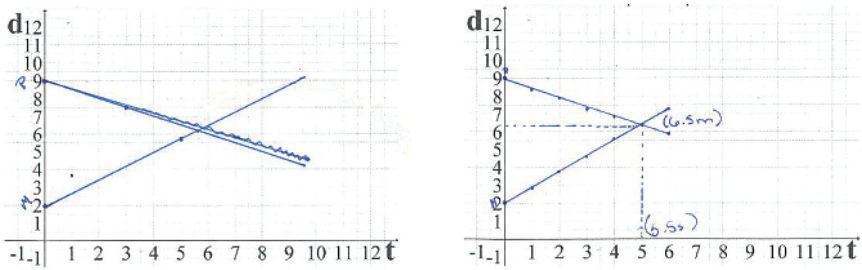


Figure 16. Deux réponses typiques du devoir fait par les élèves. Le point d'origine est défini maintenant en référence au CBR de Tina. La distance de Pierre diminue à partir de 9 mètres, qui est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire la distance initiale entre Pierre et le CBR de Tina.

On voit que la notion de point d'origine du plan cartésien est maintenant bien comprise. L'ordonnée à l'origine est identifiée sans difficulté. De plus, les élèves ont réussi à bien distinguer entre *distance parcourue* et *lieu mathématique*.

La *distance parcourue* se mesure du point de départ de l'individu qui marche jusqu'à son point d'arrêt. La distance parcourue n'est pas un concept relationnel : il ne fait intervenir que l'individu qui marche. Le lieu mathématique, par contre, est un concept relationnel : il correspond au point spatial où se trouve l'individu *par rapport à un point fixe, donné* (ici le CBR de Tina). On voit pourquoi le deuxième concept est plus abstrait que le premier. Il y a une distinction importante, mais subtile entre eux.

Cette distinction, sans laquelle le concept d'ordonnée à l'origine demeure très fragile, est bien faite par les élèves à la fin de l'activité. Ainsi, l'élève qui a produit le graphique à gauche de la Figure 16 dit : « Pierre a marché 2,5 mètres. Marthe a marché 4,5 mètres. » Ensuite, en se référant aux coordonnées du point d'intersection sur le plan cartésien, elle dit : « Lieu 6,5 m; temps 5 secondes. ». L'élève qui a fait le graphique montré à la figure 16, à droite, accompagne son graphique de cette explication : « Pierre reçoit l'enveloppe à 6,5 mètres de Tina. Il la reçoit après 5 s de marche. »

Synthèse

L'identification, dans le *Curriculum*, des grandes idées mathématiques n'est pas une tâche facile. Encore moins facile est l'élaboration des séquences d'enseignement qui mènent les élèves à comprendre les grandes idées mathématiques.

Dans ce chapitre, nous avons proposé une séquence d'apprentissage autour du concept de point d'origine du plan cartésien et de certains concepts qui y sont liés (ordonnée à l'origine, pente d'une fonction affine).

La première activité a donné l'occasion aux élèves de se familiariser avec le CBR et d'utiliser leur propre corps ainsi que certains artefacts culturels (comme la Jeep Barbie) pour reproduire des graphiques et en anticiper d'autres.

Lors de la deuxième activité, pour assurer la compréhension du concept de point d'origine du plan cartésien, l'enseignant a présenté un problème intéressant et de difficulté croissante. Une résolution naïve ou intuitive du problème mène à une contradiction concernant le point de rencontre de Pierre et Marthe. L'enseignant a été attentif à la contradiction et a eu recours à une modélisation réelle (une sorte de théâtre en action) à laquelle ont participé quatre élèves devant la classe (voir Figure 13). Aussi, pour aider les élèves à surmonter cette contradiction, l'enseignant a mis en relation les déplacements des élèves (plan concret de l'expérience) et les graphiques correspondants (plan abstrait). De plus, au cours du processus d'apprentissage, il a su utiliser, à bon escient, des objets qui se trouvaient sur les pupitres des élèves (voir Figure 14).

Les problèmes choisis et les actions de l'enseignant ont formé une *zone proximale de développement* (voir chapitre 2). À l'intérieur de cette zone, l'enseignant a créé les conditions pour que l'apprentissage ait lieu. Les élèves sont rentrés dans cette zone et, à l'aide d'interprétations de plus en plus raffinées, sont parvenus à dégager les éléments importants de la modélisation du problème en question et à les coordonner dans un ensemble cohérent. Pour trouver le point de rencontre des suspects, on peut tracer des graphiques, mais ces graphiques doivent se reporter à un point commun. Ce point commun est tout à fait arbitraire. Au départ, l'enseignant a suggéré aux élèves de choisir celui qui correspond, sur le plan concret, au CBR d'André. Le devoir a permis aux élèves de constater le caractère arbitraire de ce point commun. En effet, dans le devoir, le point commun a été le CBR de Tina. Naturellement, les graphiques changent, car ils décrivent le phénomène d'un point de vue différent. Mais, sur le plan concret, le point de rencontre est toujours le même.

On voit ici la *similarité* entre les problèmes de détectives et le problème du déplacement de la Jeep Barbie résolu par les élèves la veille (voir Figures 2 et 3). Tant le déplacement de la Jeep Barbie que la marche

des suspects peut se voir et se décrire à partir d'un CBR ou d'un autre. On voit aussi les différences : les graphiques ne seront pas les mêmes, selon qu'on décide de voir le déplacement depuis un CBR ou un autre.

C'est dans la reconnaissance de ces similarités et de ces différences qu'une abstraction importante est accomplie. Abstraire, nous l'avons dit au chapitre 1, consiste à reconnaître des différences et des similarités, et à les articuler à de nouveaux niveaux conceptuels. C'est justement cette difficile articulation que les élèves de cette classe de 9e année ont accomplie avec l'aide de leur enseignant.

Lectures supplémentaires

Contino, M. A. (1995). "Linear functions with two points of intersection?", *Mathematics Teacher*, *88*, p. 376-378.

Holiday, B. W., and L. R. Duff (2004). "Using graphing calculators to model real-world data", *Mathematics Teacher* , *97*(5), p. 328-342.

Kwon, O. N. (2002). "The effect of calculator-based ranger activities on students' graphing ability", *School Science and Mathematics*, *102*(2), p. 57-67.

Radford, L. (2009). "'No! He starts walking backwards!': interpreting motion graphs and the question of space, place and distance", *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, DOI 10.1007/s11858-009-0173-9*.

Schloemer, C. G. (1994). "Tips for teaching Cartesian graphing: linking concepts and procedures", *Teaching Children Mathematics*, *1*, p. 20-23.

Van Dyke, F., and A. White (2004). "Making graphs count", *Mathematics Teaching*, *188*, p. 42-55.

Wolff, K. C. (2002). "Elementary graphics and animation with your calculator", *Mathematics Teacher*, *95*(3), p. 172-176.

CHAPITRE 6

Des véhicules qui s'éloignent et des véhicules qui se rapprochent : le rôle des outils mathématiques dans la modélisation

Ce chapitre porte sur une série de leçons de 10e année centrées sur des concepts liés aux graphiques, aux tables de valeurs et aux équations dans le contexte d'une résolution de problème ayant recours à des objets de manipulation. La série de leçons a été donnée à un groupe d'élèves de 10e année théorique. L'attente visée par la leçon est la suivante :

> Modéliser et résoudre des problèmes portant sur l'intersection de droites (*Curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, version révisée 2005, 10e année théorique, p. 49).

Les diverses activités menées au cours de cet ensemble de leçons permettent d'augmenter le niveau d'abstraction auquel les élèves devront faire face. Ici, il ne s'agit plus de modéliser une situation unique comme c'était le cas précédemment, mais il s'agit plutôt de résoudre un système d'équations. De plus, on aborde le concept physique de la vitesse relative, d'où l'importance de se fixer un point de repère, qu'il soit fixe ou mobile.

L'élève continuera à se servir des outils mathématiques qu'il s'est appropriés dans les autres activités du texte. En particulier, il utilisera avec efficacité la table de valeurs ainsi que le graphique.

Le niveau d'abstraction le plus élevé qu'on tente d'identifier ici concerne la vitesse relative. Le but est de donner aux élèves un outil concret afin de les mettre en situation, puis de leur permettre d'émettre des hypothèses pour que, par la suite, ils retournent les vérifier à l'aide du matériel de manipulation. Cela permet à l'élève de faire le va-et-vient si souvent nécessaire entre le monde du concret et de l'abstrait.

Le reste du chapitre sera consacré à une analyse des interactions qui ont eu lieu entre les élèves lorsqu'ils ont été placés dans cette situation d'apprentissage. Une attention particulière sera portée sur les mécanismes qui ont permis aux élèves de faire le saut entre le concret et l'abstrait dans des activités que nous leur avons demandé de faire[16].

La première activité : La prise de données

La première partie de l'activité consistait en une prise de données par chacun des groupes. Cette partie de l'activité représentait une phase critique sur laquelle le reste de l'activité allait reposer. En fait, c'est ici que l'élève est exposé à l'aspect concret du problème, soit de déterminer avec précision la vitesse de chacun des véhicules de Mathieu. Cette première partie de l'activité a nécessité un temps assez important, cependant, bien utilisé. C'est ici que les élèves ont pu être exposés concrètement aux dispositifs qui allaient par la suite être modélisés dans les prochaines activités.

[16] L'activité « Les véhicules de Matthieu » se trouve en annexe.

La classe a été divisée en deux groupes afin de permettre de calculer la vitesse de chacun des véhicules. À l'aide de chronomètres et d'une piste de 100 cm, chacun des groupes a pu trouver la vitesse de son véhicule. À cette étape, les groupes ont été exposés à l'erreur de mesure et ont donc dû se prévaloir de moyens afin de minimiser l'erreur. Avec ce groupe, on a vu l'utilisation de plus d'une personne pour prendre la mesure et l'utilisation de la moyenne afin d'en arriver à une valeur plus juste pour la vitesse comme stratégies afin de minimiser l'erreur. La Figure 1 montre les élèves en train de faire la collecte de données.

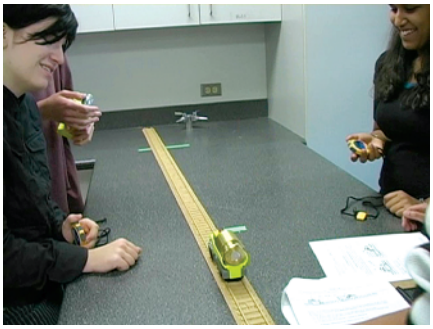


Figure 1. La collecte de données afin de déterminer la vitesse du véhicule.

En fin de compte, les groupes ont obtenu une vitesse de 11,86 cm/s pour le camion et de 9,1 cm/s pour le bouteur.

Puisque les élèves n'ont pas reçu de directives précises et qu'ils étaient laissés à eux-mêmes pour trouver une façon efficace de prendre la mesure, il y a eu une certaine période de tâtonnements avec le matériel afin de se familiariser avec ses possibilités. L'intervention de l'enseignant était peu fréquente afin de permettre aux groupes de mieux se situer et de travailler plus efficacement, tout en faisant eux-mêmes des découvertes. L'activité exigeait que les élèves travaillent en groupe afin de mener à bien la collecte.

Le premier problème : déplacement dans le même sens

La prochaine phase de l'activité demandait aux élèves de modéliser le déplacement des deux véhicules lorsqu'ils étaient placés l'un derrière l'autre, avec le véhicule le plus lent devant le véhicule le plus rapide, tel qu'il est illustré à la Figure 2.

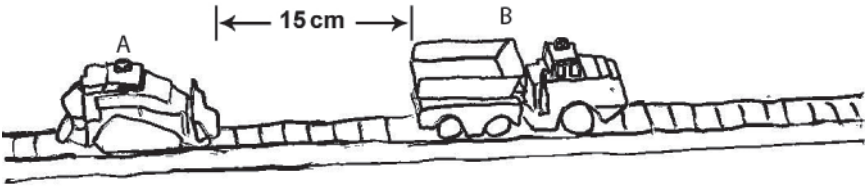


Figure 2. Problème 1 – Les deux véhicules se déplacent dans le même sens.

On demandait ensuite aux élèves de modéliser le déplacement de chacun des véhicules par un graphique, en spécifiant que la solution devait être placée dans le même plan cartésien. Par la suite, grâce au diagramme, on leur demandait de calculer une distance pour un temps précis, à un temps quelconque avant la rencontre des véhicules, ainsi que de déterminer le point précis de leur rencontre. L'activité, dans son ensemble, était faite au siège sans l'accès au matériel de manipulation utilisé dans la collecte de données. À la toute fin, les élèves étaient invités à vérifier leur réponse quant au point de rencontre à l'aide des véhicules.

Le premier défi a été de déterminer une façon de modéliser la situation. Sur le plan de la modélisation, on devait tenir compte du fait que les véhicules ne partaient pas d'un point commun et qu'ils n'avaient pas la même vitesse.

Dans un groupe, on a opté pour une approche de proportionnalité qui se résumait à utiliser le temps nécessaire pour parcourir 100 cm, puis à trouver le temps que prendra le véhicule pour parcourir 1,5 cm. Cette approche a été abandonnée par le groupe, bien qu'elle soit solidement ancrée sur leur vécu, dans le sens où l'expérience menée précédemment s'était faite sur 100 cm.

Pour résoudre le problème, le second groupe en est arrivé à la séquence suivante :

i) construire une table de valeurs pour les véhicules;

ii) placer les données sur le graphique et tracer des lignes;

iii) déterminer où les droites se croisent.

Bien que cela fût leur plan d'action, la route ne les a pas menés là directement et, en fait, les instructions qu'ils donnent ne sont pas celles qu'ils ont eux-mêmes suivies. La séquence ci-dessous illustre quelque peu leur cheminement :

1. **Monique :** Mathieu veut modéliser le déplacement de chaque auto par un graphique. De plus, il veut dessiner les deux graphiques sur le même plan cartésien et être en mesure de trouver, à partir des graphiques : a) la distance entre les autos, 1,5 seconde après qu'elles sont en route; b) la distance entre les autos à n'importe quel moment avant que l'auto A ne rattrape l'auto B; c) l'endroit précis où l'auto A rattrape l'auto B.
2. **Kim :** OK. Donc, ils se croisent sur les graphiques, ce qui veut dire que A rejoint B, non?
3. **Monique :** Aw, oui.
4. **Kim :** Se croisent (*elle écrit « se croise » au côté de c*). Euh, avant (*elle écrit avant au côté de b*) et après 1,5 seconde. (*elle écrit après au côté de a*)
5. **Monique :** Denis, vas-tu nous aider ici?
6. **Denis :** On devrait, euh, on devrait faire le graphique en premier.

7. **Monique :** OK. Alors. (*les trois consultent la feuille quadrillée*) Graphique.

8. **Denis :** Oui, parce que c'est la façon dont tu auras calculé ta vitesse en cm sur seconde. (*il montre l'axe des* y *en bougeant son stylo de haut en bas*) Et c'est la pente donc, cm sur seconde.

9. **Monique :** OK.

10. **Kim :** cm sur seconde. OK. *y* en cm. (*les trois écrivent) x* en s.

11. **Denis :** Et donc, euh, le véhicule B commence ici (*il pointe 15 sur l'axe des* y *sur son graphique*) et le véhicule A commence à l'origine parce que le véhicule est déjà en 15 cm par en avant.

12. **Enseignant :** Sûrement, on va se baser sur une certaine table de valeurs. Ça serait bien de l'indiquer. Et les points que vous allez choisir, assurez-vous d'indiquer vos points à chaque temps. « Quelle est la distance parcourue ? » Ça veut dire sur quel point vous avez décidé pour tracer vos deux droites.

13. **Monique :** OK. Alors, on fait une table de valeurs?

14. **Kim :** Table de valeurs. (*Monique sort une règle de son étui à crayons*)

15. **Monique :** OK. Où est-ce qu'on va le mettre?

16. **Denis :** On peut le faire après chaque seconde. Aw la table de valeurs. (*il tourne ses feuilles*) Aw. Je veux, je vais faire un graphique avant, ensuite la table de valeurs. Je travaille en arrière.

17. **Monique :** Mais, il a dit.

18. **Kim :** OK. Est-ce qu'on peut faire comme un brouillon table de valeurs? Juste parce que. Est-ce qu'on peut faire un graphe? (*Denis écrit sur sa feuille quadrillée*) Denis, Denis. OK. (*Denis regarde Kim)* Est-ce qu'on peut le faire pour que je comprenne ce qu'on fait?

19. **Denis :** Je vais en mettre à la distance qui est 9,1 cm (*il pointe la table*) en fonction de chaque seconde. Donc, ici je vais comme ça (*un point*) et ici je vais mettre comme ça (*un autre point plus haut*) et après je vais me faire la table de valeurs. Parce que c'est plus facile pour moi de travailler comme ça et ensuite apporter les données dans une table.

20. **Monique :** OK, alors on va tous faire ça.

21. **Denis :** OK.

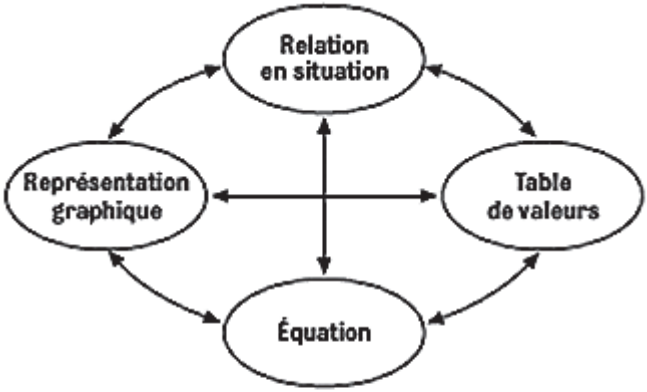
À la ligne 1, Monique lit la question afin que tous les membres du groupe soient sur la même longueur d'onde. Par la suite, Kim fait l'observation que les droites vont se croiser, et que ce point d'intersection représente l'endroit et le temps où le véhicule A rejoindra le véhicule B. À ce moment, Monique veut avoir la participation active de Denis. Denis était perçu par le groupe comme étant bien outillé pour cet exercice. Avant la ligne 5, il travaillait par lui-même sur le problème, mais Monique insistait pour qu'il travaille en groupe. Sa suggestion a donc été de faire un graphique, ce qui va à l'encontre de l'ordre que le groupe a proposé comme stratégie sur la copie finale de son travail.

Pour Denis, la représentation graphique recelait beaucoup plus d'informations qu'il pouvait analyser. À la ligne 8, il parvient à identifier la vitesse (et ses unités) en voyant la pente. Il est aussi capable d'identifier les points de départ, à la ligne 11. On voit donc que Denis repère facilement l'information pertinente d'un graphique et qu'il peut l'associer à la situation – en d'autres mots, il remarque que le taux de variation est équivalent à la vitesse et que la position d'origine est l'ordonnée à l'origine. Il semble ne pas avoir de difficulté à déterminer un temps et une position zéro dans ce contexte.

Il faut dire que l'identification d'une position zéro et d'un temps zéro n'est pas chose facile pour un élève de l'intermédiaire (voir les chapitres 4 et 5). On voit que, rendu à la fin de ce cycle, il est plus facile pour un élève de réussir, mais c'est tout de même un concept extrêmement abstrait pour lui qui vit dans un temps et un espace continus. Nous avons parlé de cela précédemment, en particulier dans l'analyse de la leçon en 9e année où l'on parlait du graphique cartésien qui décrit le phénomène d'une manière globale et systématique.

Sans s'adresser à un groupe en particulier, l'enseignant dit à toute la classe, à la ligne 12, que ce serait une bonne idée d'avoir une table de valeurs. Cela a pour effet de démobiliser les deux autres membres du groupe. À la ligne 13, Monique veut laisser de côté l'idée du graphique pour l'instant et se concentrer sur la table de valeurs comme le suggère l'enseignant. Kim est du même avis que Monique, sauf que Denis n'est pas du tout convaincu de l'utilité de la table de valeurs, comme on peut le voir à la ligne 16.

En fait, Denis dit quelque chose d'intéressant, soit qu'il « travaille en arrière ». On comprend donc par ça qu'il ne fait pas les choses comme les autres, et qu'il voit la table de valeurs comme découlant du graphique, plutôt que le graphique découlant de la table de valeurs. Dans le programme-cadre de *Mathématiques* de la 9e et 10e année, on y trouve le diagramme reproduit à la Figure 3. La flèche bidirectionnelle entre la table de valeurs et la représentation graphique est pleinement mise en évidence dans cet extrait. Denis a atteint un niveau supérieur d'abstraction où il passe directement de l'équation à la représentation graphique sans passer par la table de valeurs. C'est en fait un exercice complexe puisqu'il n'avait même pas d'équation écrite – seulement une compréhension de ce que le taux de variation et la valeur initiale représentent physiquement. Il est pourtant conscient que ce n'est pas la route « habituelle », puisqu'il avoue au groupe faire les choses « en arrière ».



Le diagramme ci-dessus illustre les représentations utilisées pour modéliser une relation en situation. On doit pouvoir passer de l'une à l'autre et établir les liens entre elles.

Figure 3. Relation entre la situation, la représentation graphique, l'équation et la table de valeurs, selon le *Curriculum de l'Ontario*, *Mathématiques*, 9e et 10e année, version révisée 2005, p. 14.

En guise de solution de compromis, Kim, qui est prise entre son partenaire Denis et l'indication de son enseignant, propose de faire une table de valeurs au « brouillon » à la ligne 18. Sa solution de compromis est aussi pour lui permettre de mieux comprendre le processus pourtant clair dans la tête de Denis. Elle veut donc faire la table de valeurs avant le graphique afin de mieux comprendre. À la ligne 19, on voit que Denis ne démord pas de son idée de faire le graphique en premier, et il parvient à convaincre les filles d'en faire autant. Il répète l'idée que c'est plus facile pour lui de travailler dans cet ordre, quitte à reproduire la table de valeurs par la suite.

Par la suite, le groupe en question est parvenu à transformer le graphique cartésien en équation telle qu'on peut le voir dans la Figure 4 où les élèves ont trouvé l'équation $y = 11{,}86x$ pour le véhicule le plus rapide, et $y = 9{,}1x + 15$ pour le véhicule le plus lent. En fait, Denis le décrit dans ces termes : « C'est *mx* et puis t'as déjà le *m*, c'est la vitesse de A. Puis avec le B puisque ça passe par le point ici, ça commence à 15. C'est une variation partielle. » Il a donc pu unir, dans cette explication les termes décontextualisés comme *variation directe* et *variation partielle*, et les rattacher à la situation vécue.

Mathieu devrait construire un table de valeurs pour pouvoir reporter les valeurs qu'il trouve sur un plan cartésien.

Table de Valeurs
Véhicule A

Distance (cm)	Temps (s)
0	0
11,86	1
23,72	2
35,58	3

Table de Valeurs
Véhicule B

Distance (cm)	Temps (s)
15	0
24,1	1
33,2	2
42,3	3

~~Il devrait faire~~ Il devrait trouver aussi des équations pour les deux droites.

Véhicule A → $y = mx$
$y = 11{,}86x$

Véhicule B → $y = mx + b$
$y = 9{,}1x + 15$

Figure 4. Identification des équations correspondant au mouvement de chacun des véhicules.

Une question difficile pour les élèves a été de déterminer ce que les valeurs sur le graphique représentaient physiquement. En fait, on demandait, par exemple, ce que signifiait le point (3,5, 46) pour l'auto qui avait démarré avec une longueur d'avance. La première réponse était de dire qu'elle avait parcouru 46 cm. Cependant, le choix de l'origine du graphique fait en sorte que le véhicule a vraiment parcouru 46 – 15 = 31 cm pendant ce temps. Donc, la différence entre la distance et la position comme concept a été ressortie. Afin d'aider dans l'explication, les élèves se sont servi de certains objets concrets, comme on peut le voir à la Figure 5. Ici, on simule à plusieurs reprises le mouvement avec le stylo qui agit comme ligne de départ, et les deux parties de la calculatrice qui agissent chacune comme un véhicule. À la suite d'une intervention de l'enseignant, le groupe a vu la différence entre la position et le déplacement (voir aussi à ce sujet le chapitre 5). Le groupe a ensuite utilisé la manipulation algébrique afin d'en arriver à une réponse numérique.

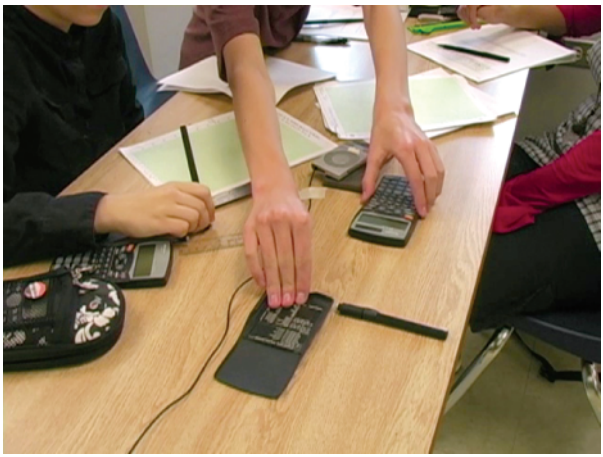


Figure 5. Utilisation de certains objets concrets afin de simuler le mouvement des véhicules.

Afin de conclure l'expérience, on a demandé aux élèves de vérifier la pertinence de leur réponse quant au point d'intersection à l'aide d'une expérience. Ils sont donc retournés au matériel de manipulation afin de confirmer ou d'infirmer leur conclusion. Au début, un débat s'entame au sujet de la position des véhicules, plus spécifiquement de ce que représente les 15 cm de distance – les élèves n'avaient pas apporté le diagramme de la Figure 2 avec eux. On a placé le devant du premier véhicule sur le point 0, et le devant du deuxième véhicule sur le point 15. On s'est rendu compte que cela n'allait pas correspondre à la situation modélisée, car le derrière du deuxième véhicule touchait presque le devant du premier, alors que les élèves s'attendaient à avoir besoin d'environ 5 secondes afin que le contact se fasse. On a ensuite placé le derrière du premier véhicule sur la ligne de 0 et le devant du deuxième sur les 15 cm pour en arriver encore à la même conclusion quant à l'invalidité du contexte réel par rapport à la modélisation effectuée. On s'est ensuite ravisé à l'aide de la feuille de route pour placer correctement chacun des véhicules.

Le groupe s'est aussi buté à des problèmes techniques dans sa quête d'une confirmation de la solution. Premièrement, il était extrêmement difficile pour les élèves de démarrer simultanément les deux véhicules. Le concept de simultanéité est en théorie très facile à comprendre et à concevoir. Cependant, dans la pratique, nous n'avons pas le luxe d'arrêter le temps tout simplement et de le repartir comme si c'était un interrupteur. Bien que les élèves aient eu une bonne idée de l'emplacement qui devait correspondre au point de rencontre, ils n'ont jamais été capables de le simuler. Ainsi, l'expérience s'est révélée non concluante.

Le deuxième problème : ajout d'un arbre

Le premier problème a été modifié afin d'ajouter un arbre – un objet stationnaire – entre les deux véhicules, tel qu'il est illustré à la Figure 6. On a demandé aux élèves de remplir des tables de valeurs afin d'identifier la distance entre les véhicules et l'objet stationnaire. Les tables ont ensuite mené au graphique, puis mener aux équations. On a demandé aux élèves de trouver le point de rencontre des deux véhicules.

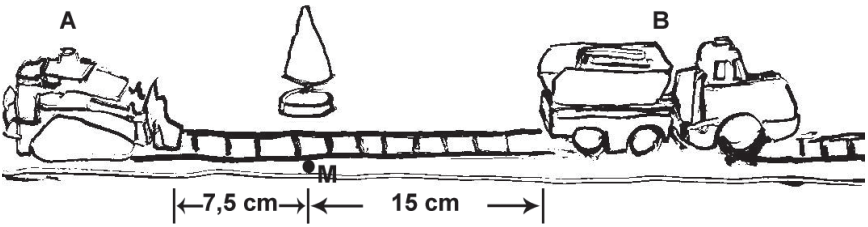


Figure 6. Problème 2 – Problème où les deux véhicules vont dans la même direction, mais où une origine différente de zéro est fixée.

Ce deuxième problème suit le même cheminement logique que le premier, et permet encore une fois à l'élève de passer au travers des éléments trouvés dans la Figure 3. La difficulté supplémentaire se situe ici sur le plan du choix du point d'origine, qui a été spécifié, et qui résulte en un point de départ négatif pour le véhicule A. Une position négative est certes un concept abstrait pour les élèves, et des activités concrètes, permettant de mieux saisir ses subtilités, stimuleront ou encourageront un apprentissage plus durable chez l'élève.

Un certain nombre de problèmes conceptuels ont fait apparition lorsqu'on a posé cette question aux élèves. Tel que l'on aurait pu deviner, c'est le fait que le véhicule A se trouvait derrière le point M qui a posé problème. Cependant, la difficulté ne concernait pas tant la table de valeurs que le graphique ou l'équation. Voici le cheminement pris par un groupe pour remplir la table de valeurs :

22. **Carl :** OK, donc pour 0 ce serait 15 cm.
23. **Sophie :** Attends, attends.
24. **Carl :** Ce n'est pas correct?
25. **Sophie :** Position arrière du véhicule B.
26. **Carl :** Oui.
27. **Sara :** Attends, il est déjà à 15.
28. **Carl :** Donc 0 sera 15.
29. **Sara :** cm, OK.
30. **Carl :** Ensuite 1 seconde, tu ajoutes à 15.
31. **Sara :** Non.
32. **Sophie :** Non.
33. **Carl :** Oui. Parce que si je suis à la même vitesse. Donc vitesse cm par seconde.
34. **Sophie :** Oh oui!
35. **Sara :** C'était 9,1.
36. **Carl :** Est-ce que c'est 9,1 pour B?
37. **Sara :** Est-ce qu'on utilise la même vitesse que la dernière fois?
38. **Carl :** Oui. Il a dit qu'on utilise la même vitesse que la dernière fois.
39. **Carl :** Ensuite 2 secondes, tu ajoutes un autre 9,1.
40. **Sara :** 33,2 (*les 3 élèves inscrivent leur réponse pour 2 secondes dans leur table de valeurs.*)
41. **Carl :** 44,3, puis 51,4, 60,5, 69,6, 78,7, 87,8, 96,9. (*ils écrivent les vitesses dans la table au fur et à mesure*)
42. **Sara :** OK, même chose pour A. Euh. Mais, il est derrière… -7,5.

43. **Carl :** Donc, il est à -7,5 à 0?

44. **Sara :** Oui.

45. **Carl :** Donc…

46. **Sophie :** Attends, attends.

47. **Carl :** -7,5 (*ils écrivent 0 seconde pour le véhicule à la position de -7,5*)

48. **Sara :** Parce qu'ils disent par rapport au point M.

49. **Sophie :** M. Alors.

50. **Carl :** Donc, tu fais -7,5, ensuite plus 11,86.

51. **Sophie :** Oui.

52. **Carl :** Ça fait 4,36. Ensuite plus 11,86 donne 16,22, 28,08, 39,94, 51,8, 63,66, 75,52, 87,38, 99,24. (*ils écrivent les vitesses dans la table au fur et à mesure*)

On remarque, à la ligne 42, que les élèves s'entendent pour que l'on suive la même procédure pour le véhicule A que pour le véhicule B. Il y a peu de débats quant au fait que le véhicule doit avoir une valeur de départ négative car, comme ils disent, il est « derrière » le point M. Le reste de la table de valeurs se remplit très facilement.

Là où le groupe a eu le plus de difficulté à conjuguer avec le négatif, c'est lors de la création du graphique. Initialement, ils produisent un axe vertical avec deux différentes échelles. L'échelle du côté positif augmente par 10, tandis que l'échelle du côté négatif augmente par -1, et ce, dans le but de couvrir les valeurs allant de -7,5 à 99,2. Ils se sont rendu compte de l'erreur et se sont rapidement ravisés. Le deuxième groupe, quant à lui, a utilisé un graphique avec les quatre quadrants. Ils n'ont fait aucune tentative pour essayer de rendre plus grand le premier et une partie du quatrième quadrant – où toute l'action physique se passait, s'assurant plutôt d'avoir une symétrie parfaite (donc allant de -90 à +90 pour les y, et de -9 à +9 pour les x).

Le groupe de Carl a ensuite commencé à placer les points sur le graphique. Après le 6e point, il dit au groupe que c'est tout ce qu'il y a à faire, puisqu'on peut maintenant joindre les points afin de former une droite. Il a été capable d'aller au-delà de la table de valeurs et de réaliser que, par la méthode utilisée pour construire la table, le résultat allait être une droite. Cependant, les deux filles du groupe ne pouvaient pas voir ce saut et ont demandé de continuer jusqu'à 9 secondes.

Par la suite, en répétant les étapes pour la deuxième ligne, Carl ne mentionne plus le fait qu'un petit nombre de points seulement est nécessaire. Il s'ajuste au fait que les autres membres du groupe ne pouvaient pas voir son raisonnement. Arrivé au point correspondant à 8 secondes, Sara dit au groupe que c'est le même point. Cette même constatation n'avait pas été faite lorsque le groupe remplissait la table. Une raison possible de cela est que la table a été remplie à une place décimale pour le véhicule B et à 2 places

décimales pour le véhicule A (voir Figure 7). On remarque aussi à la Figure 7 qu'une comparaison directe est plus difficile à faire en raison de la disposition des deux tables. Cependant, lors de l'exercice de la création du graphique, le point d'intersection est ressorti tout de suite aux élèves, et ces derniers ont rapidement fait le lien avec le point de rencontre des deux véhicules. Donc, bien que les élèves n'aient pas travaillé aussi efficacement que possible avec le graphique (en suivant les consignes de Carl, par exemple), le graphique a tout de même permis de mieux comprendre en un coup d'œil le phénomène à l'étude.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p (cm)	15 cm	24,1 cm	33.2 cm	42.3 cm	51.4 cm	60.5 cm	69.6 cm	78.1 cm	87.8 cm	96.9 cm

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p (cm)	-7,5 cm	4,36 cm	16.22 cm	28.08 cm	39.94 cm	51.8 cm	63.66 cm	75.52 cm	87.38 cm	99.24 cm

Figure 7. Tables de valeurs pour le problème 2.

C'est en ce qui a trait au développement de l'équation correspondant au phénomène qu'il y a eu le plus de discussion à l'intérieur du groupe. Cette discussion concernait deux aspects. Premièrement, il y avait une question au sujet de la méthode à utiliser afin de trouver l'équation et, deuxièmement, il y avait un litige concernant la valeur du 7,5 – à savoir s'il était positif ou négatif.

Dans le cas de Carl, il a pris les valeurs directement de son graphique et a déterminé que l'équation devait être $y = 11{,}86x - 7{,}5$ puisqu'il connaissait la valeur de la pente et la valeur de l'ordonnée à l'origine. Cependant, les deux filles n'étaient pas d'accord avec sa conclusion. Sara était d'avis que « C'est pas -7,5, parce que c'est moins, -7,5. La donnée qu'on a, c'est -7,5, et si tu fais moins, -7,5, ça devient une addition. » Donc, son idée était de soustraire la valeur de -7,5 avant de la placer dans l'équation. Carl revient à la charge en mentionnant que l'équation générale de la droite est de $y = mx + b$ et non pas $y = mx - b$. Cependant, les deux filles ne voient pas les choses de sa façon. Son argument est le suivant : « Il faut que ce soit -7,5 parce que l'ordonnée à l'origine est négative – c'est sous le 0. »

Une des raisons de la divergence d'opinions est due au fait que les 3 élèves n'ont pas pris la même approche. Si on compare la copie de Carl (Figure 8.1) à celle de Sophie (Figure 8.2) et à celle de Sara (Figure 8.3), on voit que, tel qu'il a été mentionné précédemment, Carl a lu directement l'équation de la droite du graphique. Cependant, Sophie et Sara ont pris une approche algébrique afin de déterminer l'équation. Comme le dit Sara, « Tu fais ta façon, on va faire la nôtre ». Même si Carl s'y opposait, en disant qu'il n'y avait pas de point à l'exercice que les filles entreprenaient, elles ne croyaient pas que sa réponse était juste, et d'ailleurs Sara lui dit : « C'est pas la façon que l'on a appris. », marquant le fait

que les deux filles sont encore ancrées dans une approche systématique à la résolution de tels problèmes, alors que Carl « saute » des étapes et fait des liens entre les diverses représentations, travaillant plus abstraitement.

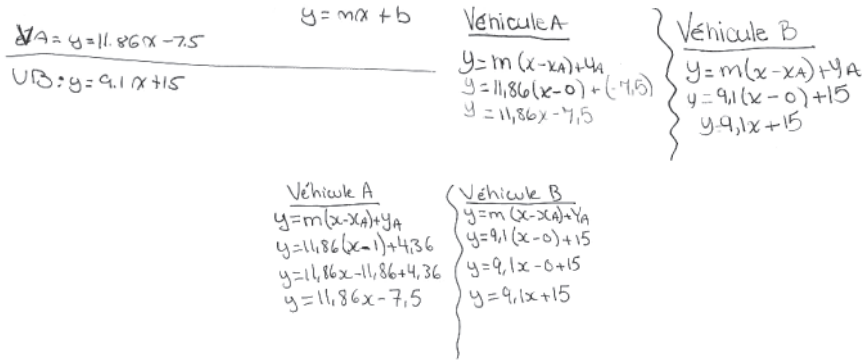


Figure 8. Au haut à gauche (Figure 8.1), le travail de Carl. Au haut à droite (Figure 8.2), le travail de Sophie; et au bas (Figure 8.3), le travail de Sara.

Pour les deux filles, il était clair qu'elles connaissaient déjà la pente. Cependant, elles ont utilisé la méthode plus générale consistant à trouver l'équation d'une droite lorsqu'on connaît un point et la pente, ne réalisant pas que l'ordonnée à l'origine était directement identifiable dans le graphique. Le groupe n'arrivait pas à s'entendre sur une approche, et les élèves ont demandé à l'enseignant d'intervenir. Il a suggéré aux filles de tenter de résoudre l'équation générale à l'aide de 2 points différents afin de confirmer ou d'infirmer – « de démontrer » – que leur résultat serait pareil, et idéalement, que leur résultat serait identique à celui de Carl. Sophie a utilisé le point (0, -7,5) et Sara a utilisé le point (1, 4,36) pour arriver à la conclusion que l'intuition de Carl était correcte. Les trois élèves ont obtenu la même équation, mais en prenant une approche différente. L'approche des deux filles aurait pu se faire sans graphique, alors que Carl a basé une bonne partie de son raisonnement sur la représentation visuelle des données du graphique.

Dans l'autre groupe, un processus semblable s'enclenche afin de déterminer l'équation des deux véhicules.

53. **Monique :** OK, alors le véhicule A, ça serait comme le *m*, c'est la vitesse et puis l'ordonnée à l'origine, ça serait le -7,5.

54. **Denis :** Cette fois-ci, c'est plus difficile. (*il dépose son stylo sur la table*) Si on fait une équation $y = mx + b$, ça serait $-b$ mais, attends, attends, attends. (*il consulte sa feuille quadrillée, mais il n'a pas de plan cartésien*). Est-ce que je peux voir ton graphique?

55. **Denis :** Um (*il observe le plan cartésien*) Oh, c'est cette droite non? (*il pointe à la droite du véhicule A*)

56. **Monique :** Oui.

57. **Denis :** Alors, ça fonctionne. (*il conclut que l'équation est* y = *11,86*x – *7,5)*

Dans cet extrait, Denis perçoit une difficulté conceptuelle et doit utiliser plusieurs moyens afin de se convaincre de la légitimité du -7,5 en tant qu'ordonnée à l'origine. Dès la ligne 54, il voit que le problème sera plus difficile à cause du négatif. Il lui faut se concentrer, prendre son temps et trianguler avec le graphique produit par ses compagnons de travail (il était absent au début de la période) (ligne 55) afin de vraiment être convaincu de son équation. Ici, encore une fois, le graphique – une représentation plus visuelle et certes plus concrète – a servi à passer à l'abstraction d'une équation.

La calculatrice à capacité graphique n'a pas été utilisée à son plein potentiel durant l'exercice. Elle a servi à faire des calculs, mais peu de graphiques. Lorsque Kim tente de tracer les deux droites, une surprise l'attend. Elle entre correctement les équations $y = 11{,}86x - 7{,}5$ et $y = 9{,}1x + 15$, puis appuie sur la touche Graph.

58. **Kim :** Aw. Elles sont parallèles? Ça ne fait pas de sens. (*elle montre le résultat aux deux autres membres du groupe*)

59. **Enseignant :** Est-ce que tu mettrais les équations là?

60. **Monique :** On n'est vraiment pas habile avec ça (la calculatrice).

61. **Kim :** Je ne sais pas, j'ai besoin de Carl. Ça ne marche pas. (*elle s'adresse à Carl*) Si je fais avec l'ordonnée à l'origine dedans, pour B je fais $y = 9{,}1x + 15$, ça fait que les deux lignes sont parallèles. L'autre ligne est $y = 11{,}86x - 7{,}5$. (*elle lui donne la calculatrice*)

62. **Carl :** Non. (*il regarde l'écran*) Oh. C'est parce que ta fenêtre ne te montre pas ce que tu veux voir. (*Carl continue de travailler à la calculatrice, et Kim va le rejoindre.*)

Après 3 minutes, elle revient avec la calculatrice où le graphique est recentré et où il est clair que les deux droites ne sont pas parallèles.

À la ligne 58, Kim arrive à une impasse cognitive. Elle a fait le graphique en mode papier-crayon pour voir que les deux droites se rencontrent. Le fait qu'elles se rencontrent représente pour elle une preuve que les deux droites ne sont pas parallèles. Cependant, lorsque la calculatrice les trace, une différente conclusion en ressort. Kim était suffisamment convaincue de son travail pour mettre en doute ce qu'elle voyait à l'écran à cause de tout le travail qu'elle avait déjà accompli. Il n'est pas si clair que, si on avait simplement demandé de tracer les deux droites, elle n'aurait pas eu comme conclusion qu'elles sont parallèles. C'est un des dangers de la calculatrice à capacité graphique, soit le petit écran et l'imprécision inhérente des graphiques. Il faut absolument, lorsqu'on enseigne comment s'en servir, s'assurer que les élèves explorent au-delà de ce qui est présenté à l'écran pour avoir une vue d'ensemble plus juste de la relation.

Une fois les équations et leur résolution faites, les deux groupes se sont tout de même entendus pour dire qu'il était plus facile, plus précis et que l'exercice prenait moins de temps avec la résolution d'équations. Il semblait donc que, pour eux, l'investissement cognitif nécessaire pour développer le système d'équations leur épargnait du temps et de l'effort un peu plus loin dans le processus, et, de plus, leur donnait une réponse « plus précise que d'essayer de repérer le point de rencontre avec l'œil nu » comme le dit Monique.

Étant donné le manque de temps, les groupes n'ont pas eu la chance d'aller vérifier leur hypothèse quant au temps et au lieu de rencontre des deux véhicules. Cependant, les mêmes difficultés mentionnées pour le premier problème auraient refait surface, notamment le problème de synchronisation des véhicules au point de départ. Un second problème cette fois aurait été l'espace limité dont on disposait, en particulier la longueur de la voie ferrée.

Le troisième problème : la collision

Dans le troisième problème, on change la direction du mouvement d'un des véhicules pour créer une collision (voir Figure 9). Tout comme les exercices précédents, on a demandé aux élèves de remplir des tables de valeurs, puis de tracer le graphique et de formuler les équations. Les élèves devaient trouver le point de rencontre graphiquement et algébriquement, puis, en fin de séance, mener l'expérience afin de confirmer ou d'infirmer leur résultat.

Figure 9. Problème 3 – Problème où les deux véhicules vont dans une direction opposée.

Ce problème suit le même cheminement logique que les deux autres problèmes, permettant encore à l'élève de passer au travers des éléments trouvés dans la Figure 3. La difficulté supplémentaire se situe ici sur le plan du choix du point de repère. Cette fois, le point n'a pas été spécifié. Contrairement au problème précédent, la vitesse qui résulte de l'opération est négative. Encore une fois, l'idée d'une vitesse négative n'est pas intuitive pour les élèves.

Le premier groupe commence à discuter de la façon d'entamer le problème.

63. **Denis :** OK, donc. On doit décider quelque chose.

64. **Monique :** C'est comme. *(elle prend les calculatrices et fait en sorte qu'elles se frappent)*

65. **Denis :** Nous devons décrire comment le faire. Euh, sur ce plan cartésien. (*il prend la feuille quadrillée*) On peut faire que le premier véhicule commence ici (*il pointe l'origine*) parce que ça, c'est comme 0 (*il pointe la feuille de questions à l'avant du véhicule A*) et l'autre commence à 100 cm, et puis ils vont comme ça. (*il montre les deux droites qui se croisent, l'une ascendante et l'autre descendante)*

66. **Monique :** Euh.

67. **Denis :** OK?

68. **Kim :** Oh!

69. **Denis :** Ou? ou? ou? (*continue*)

70. **Kim :** Ou?

71. **Denis :** Ou? Ou? Ou? (*continue*) C'est tout ce qu'on peut faire donc, c'est ce qu'on va faire.

72. **Monique :** OK.

73. **Kim :** Est-ce qu'on peut en faire une positive et l'autre négative?

74. **Denis :** C'est ce que je pensais, mais c'est stupide. Parce que, quand on aura une réponse, elle sera négative. Elles se rencontreraient à -20 cm.

Dès le début (ligne 63), Denis réalise qu'il y a une décision qui doit être prise. Pendant ce temps, Monique (ligne 64) simule la situation où les deux objets, en l'occurrence des calculatrices, partent et se rejoignent quelque part au milieu. Denis offre la suggestion de partir du devant du véhicule A comme point de repère. Il complète ensuite son hypothèse correctement et identifie avec ses mains le besoin d'une droite de pente positive et l'autre droite négative. Monique et Kim se montrent d'accord aux lignes 66 et 68. Par contre, Denis est toujours pensif et cherche une autre option (ligne 69 et début de la ligne 71), pour enfin conclure que c'est la seule façon possible de faire le problème et ainsi décréter que le problème se ferait ainsi. À la ligne 73, Kim suggère la possibilité d'avoir un véhicule qui part d'un point positif et l'autre sur un point négatif, un peu comme dans le problème précédent. Cependant, elle ne le propose que comme suggestion, et Denis (ligne 74) dit lui aussi y avoir pensé, mais que cette stratégie résulterait en une analyse plus complexe du phénomène. Le groupe s'entend pour aller de l'avant avec la stratégie de Denis.

Le groupe de Carl, Sophie et Sara suit un parcours semblable afin d'en arriver à la solution. Au début, Sara déplore le fait qu'il n'y ait pas de données, indiquant l'absence d'un point de repère. Cependant, Carl indique qu'il y a le 100 cm, pour un peu plus tard se raffiner pour dire qu'il y a 100 cm « entre » les deux véhicules. Carl utilise trois différentes stratégies afin d'illustrer le phénomène à ses collègues de travail. La Figure 10.1 le montre utilisant ses mains, ensuite à la Figure 10.2, il utilise une règle, puis

à la Figure 10.3, il utilise les véhicules. Son explication avec la règle est probablement la plus représentative de son interprétation de la situation.

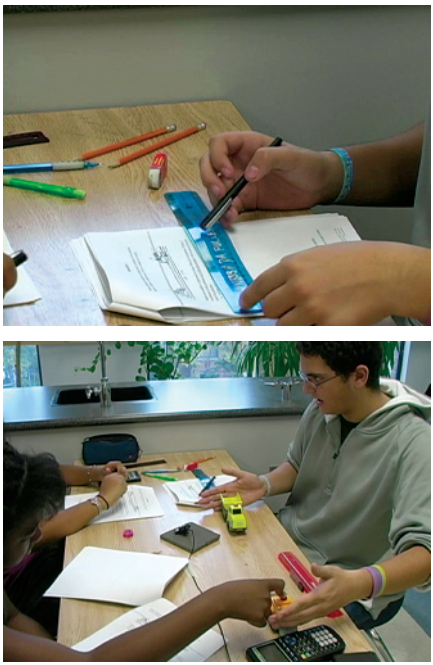


Figure 10. Carl démontre de trois façons son interprétation de la situation. À la Figure 10.1, c'est à l'aide de ses mains, à la Figure 10.2, c'est à partir d'une règle, puis à la Figure 10.3, il utilise les véhicules afin de concrétiser la simulation.

75. **Carl :** Si tu utilises une règle par exemple, un (*véhicule*) va débuter à 0 et l'autre (*véhicule*) par exemple à 30, et ils veulent se rendre au milieu. Donc celui-ci monte (*celui à 0*) et celui-là va descendre de 30 à 15 (*il fait l'exemple avec la règle*).

Il fait ensuite le même scénario, mais avec les véhicules où il explique plus clairement sa vision et son hypothèse quant au point de rencontre des deux véhicules.

76. **Carl :** OK. Il commence à 100 cm de distance. (*il place un camion à une extrémité et l'autre camion à l'autre extrémité*) Disons que c'est 100 cm. Celui-là (*camion*) est 100 cm, ici c'est 0 (*en avant du bouteur*). Et ici, (*l'espace entre le camion et le bouteur*), c'est le milieu, disons 50. Donc celui-là, ça doit monter de 0 à 50 pour arriver au milieu, et celui-là, ça doit descendre de 100 à 50 (*Carl déplace lentement son camion vers le milieu.*) Mais, ils ne vont pas arriver à 50 à cause de la vitesse. La vitesse de celui-là (*bouteur*), c'est plus vite. Ils vont se rencontrer à 60 quelque chose, 75 ou quelque chose du genre.

On peut voir par ce court extrait que Carl a bien saisi le phénomène physique à l'étude. Il est passé d'une représentation avec ses mains à une représentation avec une règle de 30 cm, à une représentation avec les deux véhicules. Il a aussi saisi le fait que les deux véhicules ne se rencontreront pas au milieu, mais plus près du véhicule le plus lent, puisqu'ils roulent à une vitesse différente.

Quelques minutes plus tard, l'enseignant va voir le groupe de Denis, Monique et Kim afin de s'assurer que le groupe progresse bien.

77. **Enseignant :** Moi, je vous demande, le véhicule A, à 0 seconde, où se trouve-t-il?

78. **Denis :** Ici. (*il pointe son graphique*) à 0.

79. **Enseignant :** Donc, tu as dit 0. Le véhicule B à 0 seconde, où se trouve-t-il?

80. **Monique :** À 100.

81. **Enseignant :** D'accord. Tu viens de décider toi-même le repère.

82. **Denis :** OK.

83. **Enseignant :** Tu as dit que ton repère, c'est A.

84. **Denis :** OK.

85. **Enseignant :** Donc, le point P (*le point de repère*), c'est A à 0 seconde. C'est lui, c'est 0. L'autre véhicule se retrouve à 100. Tu aurais pu faire le contraire. Tu aurais pu dire, à 0 seconde le véhicule B se trouve à 0 cm, mais le véhicule A se trouve à 100 cm. C'est ça, ce que je dis. Soit tu décides que ça c'est le point (*montre le devant du véhicule B sur le croquis*) ou que ça c'est le point (*montre le devant du véhicule A*). Ça va donner la même chose.

86. **Kim :** OK.

87. **Enseignant :** D'accord. Oui ou non?

L'enseignant commence son intervention (ligne 77) en demandant de lui indiquer le point de repère que le groupe avait choisi. Une fois satisfait de la réponse donnée par le groupe, il vient infirmer l'idée qu'avait Denis qu'une

seule approche était possible (ligne 71) en mentionnant le fait qu'on peut regarder le problème en renversant les directions (ligne 85). Ce renversement est non intuitif parce que, sur le diagramme (Figure 9), le véhicule A est à la gauche, et le véhicule B est à la droite. Depuis un très jeune âge, on a montré aux élèves, avec la droite numérique, que les nombres positifs sont à la droite du zéro, et les nombres négatifs sont à la gauche. Or, ici, l'enseignant va à contre-courant en suggérant que le 0 est à la droite, et +100 est à la gauche. Une autre stratégie pour le groupe aurait été de prendre le 0 à la droite, et de choisir le -100 à la gauche. Mais, encore une fois, il semble contre-intuitif de faire cela et plus rassurant pour des élèves du cycle intermédiaire de travailler avec des nombres positifs.

Dans le groupe de Carl, Sophie et Sara, c'est cette dernière qui pose la question au groupe plutôt que l'enseignant.

88. **Sara :** Mais lequel commence à 0, et lequel commence à 100?

89. **Carl :** Ça ne fait pas de différence.

90. **Sophie :** Non, regarde.

91. **Carl :** A commence à 0 et ensuite B commence à 100. Et ensuite, ils s'approchent. (*il fait l'exemple avec ses mains qui se frappent*)

92. **Sara :** OK.

Elle veut savoir lequel des deux véhicules correspond au zéro. C'est Carl à la ligne 91 qui parvient à la convaincre de l'utilisation d'un point de repère plutôt que l'autre. Il s'est basé sur son argumentation précédente avec le mouvement des mains et l'utilisation de la règle pour donner une réponse à Sara.

Le prochain extrait montre les étapes suivies par le groupe de Denis, Monique et Kim afin de développer les équations pour chacun des véhicules une fois que le graphique est produit.

93. **Denis :** On a déjà nos choses. On a nos deux équations, donc ici, pour le véhicule B, on ajoute notre négatif. (*il retourne au problème 1*)

94. **Monique :** Mais, il n'y a pas +15.

95. **Denis :** Oui. Il n'y a pas +15

96. **Monique :** C'est différent.

97. **Denis :** Aw.

98. **Monique :** C'est +100.

99. **Denis :** Non, c'est parce que, si on met +100, ça veut dire que, c'est toujours, à chaque fois, mais avec l'autre, avec celui-là (*il montre le plan cartésien du problème 2*), on a fait, on a utilisé la même équation. On n'a pas écrit plus quelque chose ou moins quelque chose, donc on peut l'utiliser quand même.

100. **Kim :** Ici. (*elle montre le plan cartésien du problème 2)*

101. **Denis :** Oui, on peut le faire, on ne doit pas juste faire la distance.

102. **Kim :** On a fait l'équation comme 11,86.

103. **Monique :** Tu veux dire celui-là? (*elle montre le graphique qu'ils sont en train de faire)*

104. **Denis :** Non, je veux dire celui-là. (*il prend le graphique de Kim)* Celui que vous avez fait quand j'étais absent.

105. **Kim :** C'était $y = 11{,}86x$ et $y = 9{,}11x$.

106. **Monique :** Ça devrait être $-9{,}11x$.

107. **Denis :** C'est seulement la vitesse parce que si… Tu sais, ils ont donné le repère. Si on commence par là, ou par là, mais on n'a pas écrit où on commence dans l'équation.

108. **Monique :** Oui.

109. **Denis :** Oui?

110. **Monique :** Oui. On avait écrit (*elle consulte ses feuilles*), on avait écrit $y = -7{,}5$.

111. **Denis :** C'est vrai… Qu'est-ce que je fais? Wow!

112. **Monique :** Parce que c'est l'ordonnée à l'origine.

113. **Denis :** Tu as raison. OK. Tu as raison, tu as raison. Je l'ai.

114. **Kim :** Donc, on, il faut qu'on écrive l'ordonnée?

115. **Monique :** Mmm.

116. **Denis :** OK, c'est vrai. Ici on a, on doit commencer avec +100. + 100 et la pente est négative.

117. **Monique :** Oui. Exactement.

Au début de la séquence (ligne 93), Denis voulait simplement retranscrire les équations utilisées dans un problème précédent, et ne pas utiliser d'ordonnée à l'origine. Monique et Denis tentent d'expliquer l'absence du +15 ou la présence du +100 en retournant aux problèmes précédents. À la ligne 99, Denis explique sa compréhension du +100 qui veut dire, pour lui, que pour chaque seconde, il ajoute 100. Selon lui, il doit se limiter à travailler avec les vitesses. Cependant, Monique parvient à le convaincre en lui montrant un exemple du travail effectué plus tôt, et Denis se convertit à l'idée d'avoir une ordonnée à l'origine dans la question, en plus d'une valeur négative pour la pente.

Une fois leur stratégie identifiée, le groupe est retourné à la feuille de problème afin de remplir la table de valeurs. Dans le cas de Monique, elle a écrit 2 points pour chacun des deux véhicules (0 seconde et 1 seconde), puis elle a écrit l'équation correctement au-dessous. Dans le cas de Denis, il a pris 3 points pour chacun des deux véhicules (0, 1 et 2 secondes), puis il a écrit l'équation correctement au-dessous de chacune des tables de valeurs.

Dans le cas de Kim, elle a placé 4 points (0 à 3 secondes) avant de formuler l'équation. Chacun a par la suite placé les points sur le graphique afin d'en arriver à la représentation visuelle de la situation. La précision des élèves n'est pas à contester, car ils sont arrivés essentiellement à la même solution en utilisant l'approche graphique plutôt que l'approche algébrique – chose difficile à faire surtout lorsqu'on travaille avec des décimales comme c'était le cas ici. On peut, par contre, voir le différent degré d'aisance à travailler à l'aide des graphiques chez les trois élèves. Monique associe directement les 2 points à une droite et la trace aussitôt, alors que Kim a besoin de plus de points avant d'être convaincue que c'est une droite.

En circulant, l'enseignant a fait un commentaire quant à l'utilisation des x et des y. Il a mentionné que le groupe semblait ancré sur l'utilisation de ces variables, alors qu'il aurait été préférable, selon lui, de parler de v et de t, puisqu'on pouvait les associer à des quantités physiques précises. Cela est une excellente stratégie à promouvoir, soit l'utilisation de variables qui ont un sens dans le contexte de la question. Trop souvent en mathématiques on s'éloigne du sens en utilisant des variables comme x et y, qui ne font que rendre le problème encore plus abstrait.

Le groupe a déterminé que les résultats coïncident presque parfaitement entre la solution algébrique et la simulation de l'événement (voir Figure 11). Lorsque l'enseignant a demandé les raisons possibles pour cette différence, Monique a mentionné la possibilité de variables comme l'erreur humaine qui peuvent influencer le résultat. Sa conclusion est que la simulation « n'est pas comme les mathématiques parfaites ». En fait, par cet énoncé, elle indique qu'elle comprend le plus grand rôle des mathématiques, soit de modéliser une situation et de tenter de trouver des outils afin de manipuler le modèle, tout en réalisant les limites inhérentes de la concordance entre le modèle et la réalité. Denis a ajouté la difficulté encourue avec le matériel afin d'assurer un départ simultané des deux véhicules. Sara a mentionné que « le graphique, c'est plus précis que l'expérience ». Ici, c'est presque une fausse impression de sécurité, car le modèle ne devrait pas être plus précis que le phénomène observé. Les paroles de Sara laissent croire qu'elle n'a pas tout à fait saisi la nuance entre le modèle mathématique (ici le graphique) et le phénomène physique (l'expérience), et celui qui est venu en premier, contrairement à Monique.

Figure 11. Résultats de l'expérience.

Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons fait des commentaires portant sur une séquence d'enseignement visant les concepts rattachés à l'intersection de deux droites dans le plan cartésien. Pour y arriver, les élèves sont passés par les étapes de la modélisation physique de la situation, puis par des tables de valeurs, des graphiques et des équations. La séquence s'inscrit dans le *Curriculum de l'Ontario* pour la 10e année théorique sous « Modéliser et résoudre des problèmes portant sur l'intersection de droites » (*Curriculum de l'Ontario*, *Mathématiques*, version révisée 2005, 10e année théorique, p. 49).

L'activité était basée sur des véhicules réels avec une propriété fixe, soit la vitesse. Nous avons permis aux élèves de modifier la distance initiale les séparant, ainsi que le sens du mouvement de chacun. Le fait que nous parlions de véhicules limités à une voie ferrée contraignait la situation à un problème classique en deux dimensions. Parmi les difficultés rencontrées par les élèves, l'identification d'un point repère a été la plus grande. Ce point repère, celui à partir duquel la position et la vitesse vectorielle sont considérées, a été donné dans un certain nombre d'activités, mais laissé aux élèves à identifier dans d'autres. Cela faisait en sorte que les élèves, en groupe, devaient déterminer si la valeur initiale de la fonction était positive ou négative et si la vitesse à utiliser était positive ou négative.

Les extraits présentés dans ce chapitre permettent de voir la richesse de la communication entre les élèves, et entre les élèves et l'enseignant. Comme le chapitre 2 le suggère, nous voyons que cette activité, basée sur des questions entourant une *unité conceptuelle*, a été très bien appréciée et réussie par les élèves. La séquence d'enseignement proposée amène lentement mais sûrement l'élève vers un raffinement de son modèle mathématique au fur et à mesure que le contexte change. En physique, le mouvement et la position des véhicules semblent peu changer d'une activité à l'autre. Cependant, en mathématiques, il y a plusieurs éléments à considérer.

Lectures supplémentaires

Arzarello, F., and O. Robutti (2004). "Approaching functions through motion experiments", *Educational Studies in Mathematics, 57*(3), p. 305-308.

Bay, J. M., and D. G. Wasman (2000). "Making the coordinate grid come to life with human graphing", *Mathematics Teacher, 93*(7), p. 553-554.

Fechhelm, J., and J. Nelson (2007). "Walk this way", *Science Scope, 30*(6), p. 50-52.

Hale, P. (2000). "Kinematics and graphs: Students' difficulties and CBLs", *Mathematics Teacher*, *93*(5), p. 414-417.

Lapp, D. A., and V. F. Cyrus (2000). "Using data-collection devices to enhance students' understanding", *Mathematics Teacher, 93*(6), p. 504-510.

Swingle, D. A., and L. M. Pachnowski (2003). "Filling in the gaps: Modelling incomplete CBL data using a graphing calculator", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(3), p. 361-370.

Annexes

Contenu des annexes

Liste des activités

1. Activités du chapitre 3
2. Activités du chapitre 4
3. Activités du chapitre 5
4. Activités du chapitre 6

ANNEXE

Activités du chapitre 3

Introduction aux méthodes algébriques de résolution d'équations

---

Une version électronique éditable des activités qui suivent se trouve dans le DVD d'accompagnement.

Rappel : permission accordée à l'enseignante ou à l'enseignant de reproduire ces documents pour utilisation en salle de classe ou pour des séances de formation, pourvu que la source et le nom des auteurs soient indiqués.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Équations

1re journée

Consignes

Dans les problèmes ci-après, on vous demande :

(a) de lire l'énoncé;

(b) de créer une équation avec le matériel concret;

(c) de résoudre le problème;

(d) d'illustrer votre démarche de résolution.

Problème 1

La mère de Paulette et de Richard décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met **le même nombre** de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.
Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.
Maintenant, les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.
Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Illustrez votre démarche :

Problème 2

La mère de Mario et de Chantal décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met **le même nombre** de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Mario avait déjà 12 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.
Chantal avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 4 enveloppes.
Maintenant, Chantal a le même nombre de cartes de hockey que Mario.
Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Illustrez votre démarche :

Problème 3

La mère de Mat et de Matik décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met **le même nombre** de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Mat avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.
Matik avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 3 enveloppes.
Maintenant, les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.
Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Illustrez votre démarche :

Problème 4

Expliquez, dans vos propres mots, les étapes que l'on doit suivre pour résoudre une équation.

Problème 5

Votre groupe va inventer un problème sur des cartes de hockey et va le donner à un autre groupe. La solution du problème que vous allez inventer doit avoir comme réponse : **dans une enveloppe, il y a 3 cartes** (mais, bien sûr, vous ne le direz pas dans votre problème, car l'autre groupe devra trouver la solution).

Écrivez ici le problème que vous donnerez à l'autre groupe :

Problème 6

La mère de Mario et de Chantal décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Mario avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.
Chantal avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.
Maintenant, Chantal **a le même nombre de cartes** de hockey que Mario.
Combien de cartes chaque enveloppe peut-elle avoir?

Illustrez votre démarche et expliquez-la en détail :

Problème 7

Cette fois-ci Mario avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.

Chantal avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 3 enveloppes. On sait que les enveloppes ont le même nombre de cartes chacune et que maintenant Chantal **a le même nombre de cartes** de hockey que Mario.

Combien de cartes chaque enveloppe peut-elle avoir?

Illustrez votre démarche et expliquez-la en détail :

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Équations

2e journée

Partie 1

a) Écrivez une équation algébrique correspondant au problème 2. Puis, résolvez l'équation en montrant toutes les étapes.

b) Écrivez une équation algébrique correspondant au problème 3. Puis, résolvez l'équation en montrant toutes les étapes.

c) Écrivez une équation algébrique correspondant au problème 6. Puis, résolvez l'équation en montrant toutes les étapes.

d) Écrivez une équation algébrique correspondant au problème 7. Puis, résolvez l'équation en montrant toutes les étapes.

Partie 2

Résolvez algébriquement les équations suivantes.

a) $7n + 2 = 6n + 8$

b) $2x + 3 = x + 5$

c) $3x + 3 = x + 9$

d) $2x + (-3) = x + 5$

e) $2x - 3 = x + 5$

f) $2x + 5 = x + 3$

g) $x + 3 = 5 - x$

h) $7n + 8 = 5n + 2$

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Un devoir pour s'amuser passionnément

Résolvez algébriquement les équations suivantes.

a) $2n + 4 = n + 12$

b) $3n - 4 = n + 10$

c) $24 - n = 6 + n$

d) Expliquez, dans vos propres mots, les étapes que l'on doit suivre pour résoudre une équation.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Généralisation

3e journée (2 périodes)

Problème 1

Marc épargne 3 $ par semaine. Il commence avec 12 $.

Quelle somme d'argent aura-t-il épargnée :

a) à la fin de la troisième semaine?

Réponse : _____

b) à la fin de la cinquième semaine?

Réponse : _____

c) à la fin de la 100e semaine? Expliquez votre démarche.

d) Expliquez, dans vos propres mots, comment calculer l'argent épargné à la fin d'un nombre de semaines quelconque.

e) Trouvez une formule algébrique qui exprime la somme d'argent épargnée après n semaines.

Problème 2

Voici les quatre premiers termes d'une suite de nombres

Terme 1	Terme 2	Terme 3	Terme 4
0,42	0,75	1,08	1,41

a) Trouvez le terme 5, le terme 6 et le terme 7 de cette suite.

b) Trouvez le terme 100 de cette suite. Expliquez votre démarche.

c) Expliquez, dans vos propres mots, comment calculer un terme quelconque de cette suite.

d) Trouvez une formule algébrique qui permet de calculer le terme n de la suite.

Problème 3

Voici les quatre premiers termes d'une suite de nombres :

Terme 1	Terme 2	Terme 3	Terme 4
11	9	7	5

a) Trouvez le terme 5, le terme 6 et le terme 7 de cette suite.

b) Trouvez le terme 100 de cette suite. Expliquez votre démarche.

c) Expliquez, dans vos propres mots, comment calculer un terme quelconque de cette suite.

d) Trouvez une formule algébrique qui permet de calculer le terme n de cette suite.

Problème 4

Pierre fait une suite de maisons à l'aide de cure-dents :

Terme 1	Terme 2	Terme 3

Le terme 1 a 5 cure-dents; le terme 2 a 9 cure-dents; le terme 3 a 13 cure-dents.

a) Combien de cure-dents y a-t-il dans le terme 10?

b) Combien de cure-dents y a-t-il dans le terme 100? Expliquez votre démarche.

c) Expliquez, dans vos propres mots, comment calculer un terme quelconque de cette suite.

d) Trouvez une formule algébrique qui donne le nombre de cure-dents dans le terme n.

e) Dans une autre classe, un groupe a trouvé la formule $n + 4$.
Êtes-vous d'accord avec cette formule? Donnez des raisons convaincantes.

f) Dans une autre classe, un autre groupe a trouvé la formule $4n + 1$. Êtes-vous d'accord avec cette formule? Donnez des raisons convaincantes.

g) En général, comment fait-on pour savoir à coup sûr si deux formules sont égales? Donnez des raisons convaincantes.

Problème 5

Mireille fait une suite de triangles à l'aide de cure-dents.

Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3

Le terme 1 a 3 cure-dents; le terme 2 a 5 cure-dents; le terme 3 a 7 cure-dents.

a) Combien de cure-dents y a-t-il dans le terme 10?

b) Combien de cure-dents y a-t-il dans le terme 100? Expliquez votre démarche.

c) Expliquez, dans vos propres mots, comment calculer un terme quelconque de cette suite.

d) Trouvez une formule algébrique qui donne le nombre de cure-dents dans le terme n.

Problème 6

Pour trouver la formule du terme n dans une suite, quelle méthode préférez-vous : la méthode numérique ou la méthode géométrique? Expliquez.

Problème 7 : Les écureuils se préparent pour l'hiver!

Il était une fois deux écureuils nommés A et B qui se préparaient pour l'hiver.

Un jour, en se promenant dans la forêt, l'écureuil A a trouvé un trou qui contenait déjà 4 noix et l'écureuil B a trouvé un trou qui contenait déjà 86 noix.

En indiquant le trou contenant 4 noix, l'écureuil A dit : « Moi, je vais passer l'hiver dans ce trou. » L'écureuil B répondit : « Moi, je vais passer l'hiver dans le trou là-bas » en indiquant le trou qui avait déjà 86 noix.

En préparation pour l'hiver, chaque jour, les écureuils partaient chercher des noix, qu'ils ramenaient chacun à leur trou.

L'écureuil A amassait toujours 3 noix par jour.

L'écureuil B amassait toujours 1 noix par jour.

Quelques jours plus tard, l'écureuil A s'est dit : « La première journée, j'avais 4 noix; la deuxième journée, j'avais 7 noix, la troisième journée, j'avais 10 noix. La première journée, mon voisin avait 86 noix; la deuxième journée, il en avait 87 et la troisième journée, 88. »

Après une petite réflexion, il a ajouté : « Un jour je vais avoir exactement le même nombre de noix que lui! »

En sachant que les écureuils ne mangent jamais leur provision, utilisez l'algèbre pour calculer le jour où l'écureuil A aura exactement le même nombre de noix que l'écureuil B. Combien de noix auront-ils à ce moment-là? Expliquez votre raisonnement.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Un autre devoir pour continuer à s'amuser passionnément

Problème 1

Marc épargne 4 $ par semaine. Il commence avec 7 $.
Quelle somme d'argent aura-t-il épargnée :

a) à la fin de la troisième semaine?

Réponse : _____

b) à la fin de la cinquième semaine?

Réponse : _____

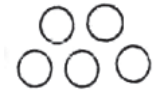
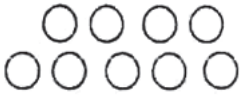
c) à la fin de la 100e semaine? Expliquez votre démarche.

d) Expliquez, dans vos propres mots, comment calculer l'argent épargné à la fin d'un nombre de semaines quelconque.

e) Trouvez une formule algébrique qui exprime la somme d'argent épargnée après n semaines.

Problème 2

Voici une suite :

Figure 1	Figure 2	Figure 3
		

a) Trouvez le nombre de cercles dans la Figure 10.

b) Trouvez le nombre de cercles dans la Figure 100. Expliquez votre raisonnement.

c) Trouvez une formule algébrique qui donne le nombre de cercles dans la Figure n.

ANNEXES

Activités du chapitre 4

Interprétation et production de graphiques

Une version électronique éditable des activités qui suivent se trouve dans le DVD d'accompagnement.

Rappel : permission accordée à l'enseignante ou à l'enseignant de reproduire ces documents pour utilisation en salle de classe ou pour des séances de formation, pourvu que la source et le nom des auteurs soient indiqués.

Nom des élèves : _____

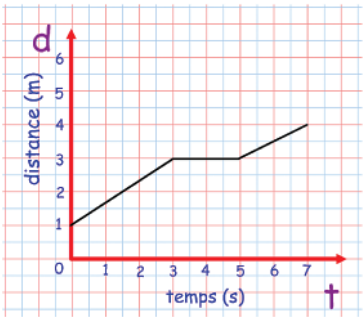
Date : _____ Groupe : _____

Compétition de la marche

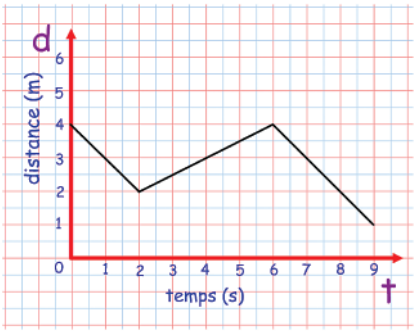
1. Tina se trouve à 1 mètre d'une fontaine. Elle commence à marcher en ligne droite. Le premier graphique ci-dessous représente sa marche.

2. Jean se trouve à 4 mètres de la fontaine. Il commence à marcher en ligne droite. Le deuxième graphique ci-dessous représente la marche effectuée par Jean.

Marche de Tina



Marche de Jean



Votre groupe doit reproduire ces marches, en sachant que chaque groupe ne peut faire qu'un maximum de deux essais par marche. Les points à gagner sont expliqués ci-dessous.

Avant de démontrer votre marche à l'enseignante ou à l'enseignant dans le corridor, vous devez :

2.1 étudier, discuter et répéter votre marche en classe avec votre groupe;

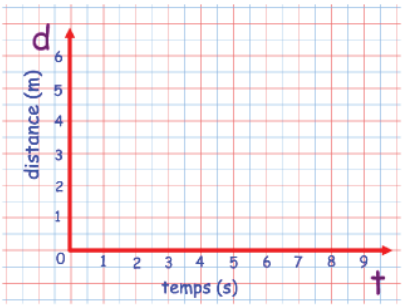
2.2 fournir une explication précise de la marche.

Pointage de la compétition

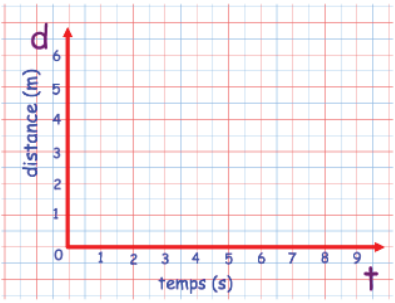
1er essai : possibilité de 12 points (4 + 4 + 4)
2e essai : possibilité de 9 points (3 + 3 + 3)

Explication précise (en utilisant la terminologie mathématique) de la marche de Tina :

Esquisse de la reproduction de la marche de Tina faite par votre groupe :



Premier essai

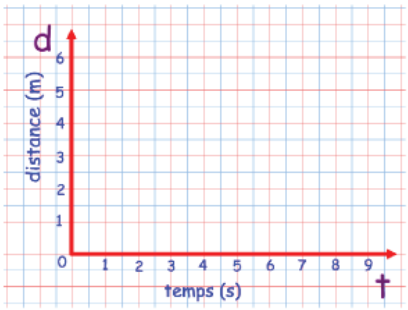


Second essai

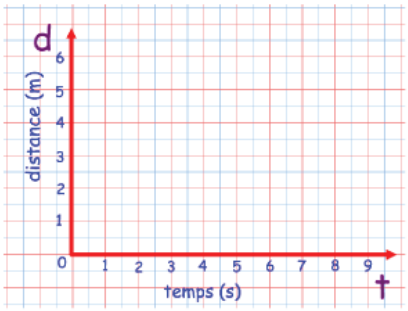
Points accumulés (à remplir par l'enseignante ou l'enseignant) :

Explication précise (en utilisant la terminologie mathématique) de la marche de Jean :

Esquisse de la reproduction de la marche de Jean faite par votre groupe :



Premier essai



Second essai

Points accumulés (à remplir par l'enseignante ou l'enseignant) :

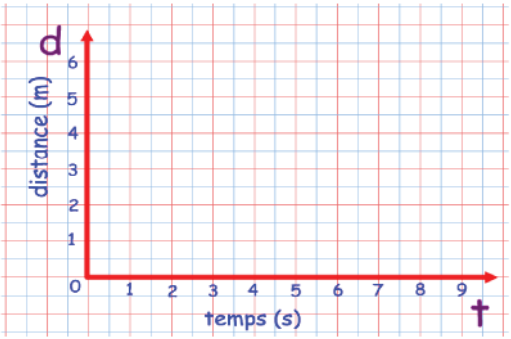
La marche de l'enseignante ou de l'enseignant

2.3 Votre enseignante ou votre enseignant va effectuer une marche en avant de la classe.

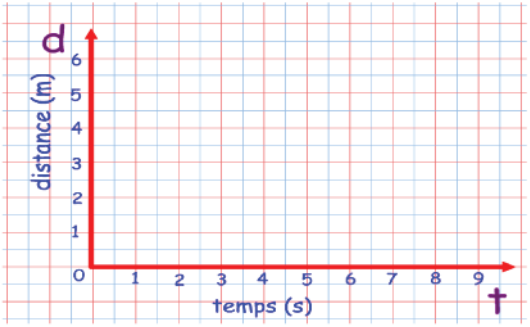
a) Observez attentivement la marche de l'enseignante ou de l'enseignant et, en discutant avec votre groupe, notez, dans l'espace ci-dessous, des éléments qui pourront vous aider plus tard à faire le graphique de la marche.

Éléments de la marche que nous considérons comme importants :

b) L'enseignante ou l'enseignant va répéter la marche une deuxième fois. Observez attentivement la marche, puis faites le graphique distance-temps.



c) Pour que vous puissiez vérifier votre graphique, l'enseignante ou l'enseignant fera la marche une dernière fois. Observez, puis dessinez le graphique définitif



Graphique définitif de la marche de l'enseignante ou de l'enseignant

d) L'enseignante ou l'enseignant va vous montrer le graphique produit par le CBR et une calculatrice. Discutez des différences qui existent entre votre graphique et celui de la calculatrice.

Points (à remplir par l'enseignante ou l'enseignant) : _____

Total des points : _____

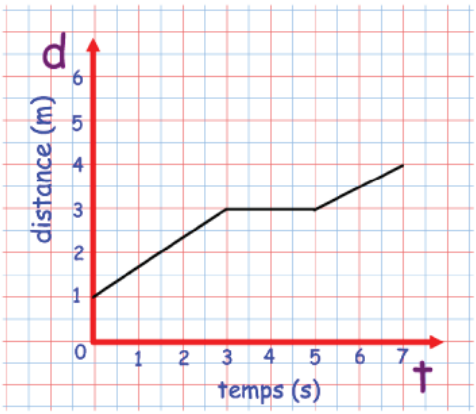
Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Tina et le chien

Dans l'activité précédente, Tina partait à 1 mètre d'une fontaine et marchait en ligne droite. Voici le graphique de la marche de Tina.

Marche de Tina

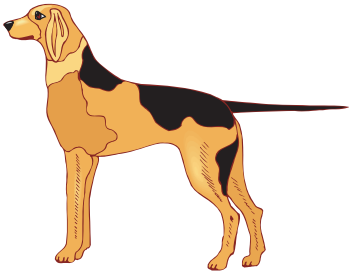


1. Calculez la vitesse de Tina pendant les 3 premières secondes de sa marche. Montrez vos calculs.

2. Quand Tina marche-t-elle plus vite? Expliquez votre réponse.

3. Quand Tina se trouve-t-elle à 3 m de la fontaine? Justifiez votre réponse.

Le chien

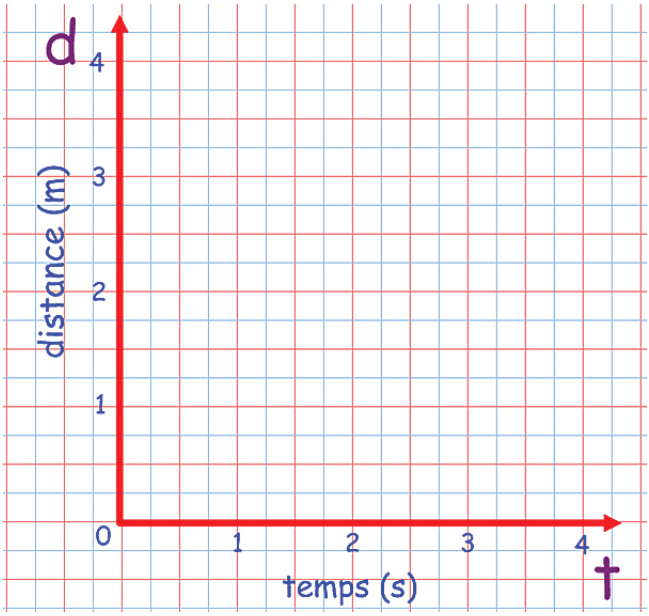


4. Un chien part de la fontaine dans la direction de Tina au même moment que Tina commence à marcher. Le chien court à une vitesse de 0,75 m/s.

   Remplissez le tableau ci-dessous, qui indique la distance qui sépare le chien de la fontaine.

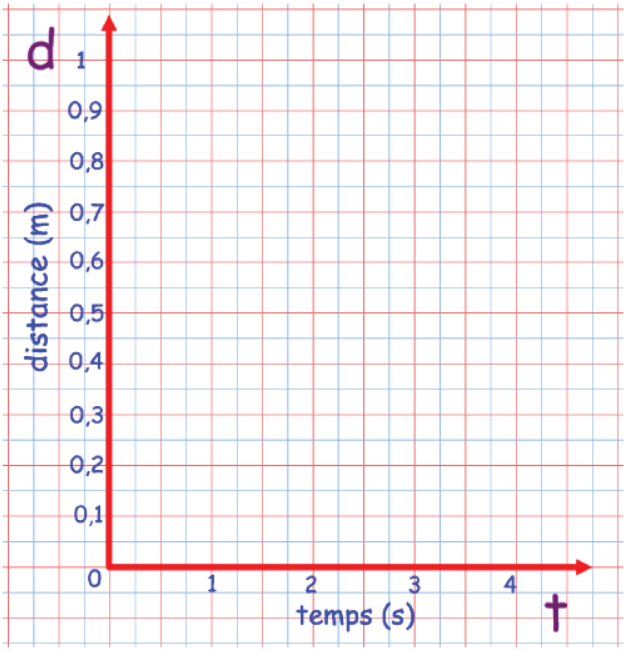
Temps *t* (s)	Distance (m)
0	
1	
2	
3	
3,5	

5. Faites un graphique de la distance qui sépare le chien de la fontaine par rapport au temps. Donnez un titre convenable à votre graphique.



6. Calculez la distance qui sépare Tina du chien quand $t = 1$, quand $t = 2$, quand $t = 3$, quand $t = 3{,}5$ et quand $t = 4$ s. Expliquez vos calculs.

7. Faites un graphique qui indique la distance qui sépare Tina du chien entre 0 et 4 secondes, et donnez un titre approprié au graphique.



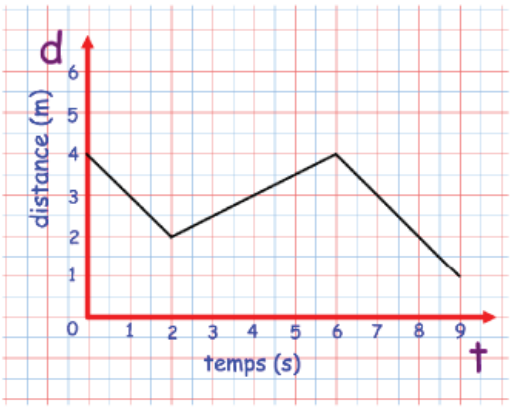
8. Quelle est la distance qui sépare Tina du chien à 1,5 seconde? Comment êtes-vous arrivés à votre réponse?

9. À quel moment le chien rejoint-il Tina? À quelle distance de la fontaine se trouvent Tina et le chien? Justifiez votre réponse.

Quelques questions sur Jean

Dans l'activité précédente, Jean partait à 4 mètres d'une fontaine et marchait en ligne droite. Voici le graphique de la marche de Jean.

Marche de Jean



10. Calculez la vitesse de Jean entre 0 et 2 secondes.

11. Quand Jean se trouve-t-il à 3 mètres de la fontaine? Expliquez.

12. Quand Jean se trouve-t-il le plus éloigné de la fontaine?

13. Si Jean commence sa marche en même temps que Tina et le chien, est-ce que Jean est loin d'eux quand le chien rejoint Tina? Expliquez votre réponse.

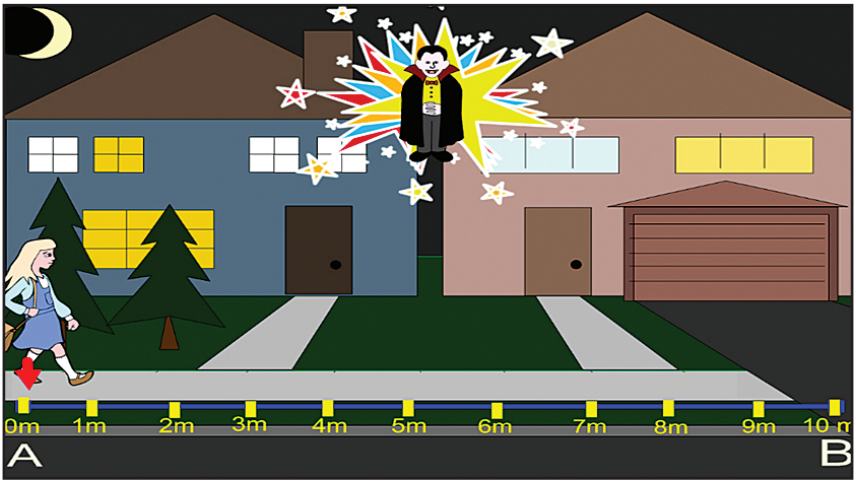
Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

Le sort de Dracula[1]

Il était une fois un village plein d'enfants. Dans ce village, Dracula avait pris possession d'un trottoir que les villageois appelaient le trottoir hanté.

Chaque soir, Dracula attendait patiemment afin de jeter un sort aux enfants qui s'aventuraient à marcher sur une section AB de 10 mètres du trottoir hanté (voir photo ci-dessous).

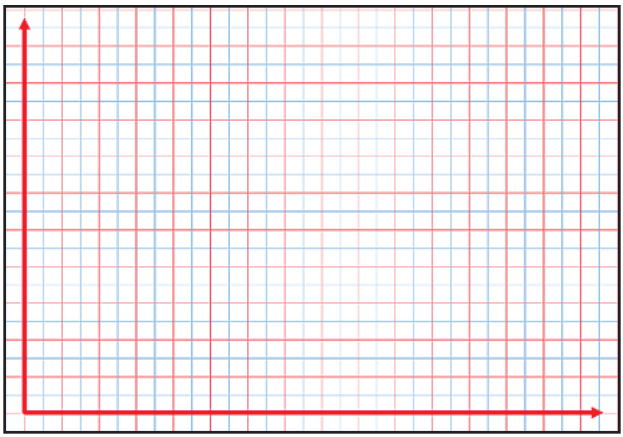


Lucie, une jeune fille téméraire, marchait le long de la section AB du trottoir hanté. Pendant sa marche, Lucie se rendit compte que ses clés étaient tombées par terre. Elle retourna sur ses pas, ramassa très vite ses clés et s'enfuit, car elle entendit des bruits très bizarres.

1. Visionnez le petit film de Dracula et Lucie.

   a) À l'aide du film, représentez graphiquement la marche de Lucie, en identifiant convenablement les axes.

1 Note aux enseignantes et aux enseignants : Le film se trouve sur le DVD d'accompagnement. Il peut aussi être téléchargé dans la rubrique **Publications**, en cliquant sur **Processus d'abstraction en mathématiques**, à l'adresse suivante : www.laurentian.ca/educ/lradford.



b) Remplissez un tableau de valeurs.

Dracula a-t-il réussi à capturer Lucie?

Dracula avait quand même une contrainte. Lorsqu'un enfant marchait sur la section AB, il ne pouvait essayer que trois fois de lui jeter un sort.

Or, personne dans le village ne savait que Dracula jetait toujours son sort à trois instants précis, comptés à partir du moment où l'enfant s'engageait dans la section AB. Personne ne savait non plus que, pour que le sort fasse effet, l'enfant devait se trouver à une distance précise du point A, comme il est indiqué dans le tableau suivant.

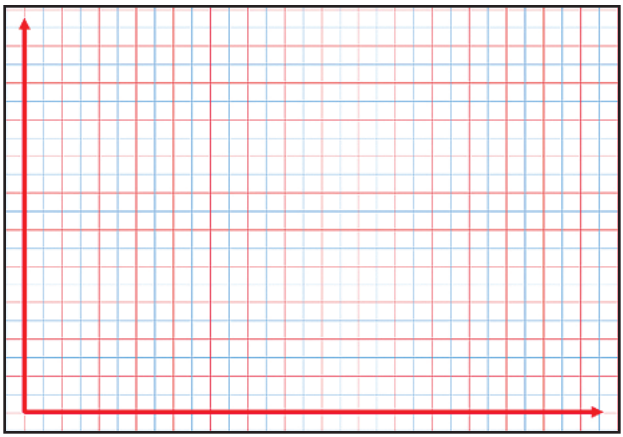
Sort	Temps	Distance du point A
1	3 secondes	1,4 m
2	8 secondes	2,3 m
3	10 secondes	6 m

Dracula a-t-il réussi à attraper Lucie? Justifiez votre réponse.

André l'audacieux!

André, un petit garçon très audacieux, traversait la section AB à une vitesse constante de 0,25 m/s. Tout à coup, précisément 8 secondes après être passé par A, il vit Dracula et se sauva à une vitesse de 2 m/s.

a) Représente graphiquement le trajet d'André, en identifiant convenablement les axes.



b) Dracula a-t-il réussi à attraper André? Justifiez votre réponse.

c) Est-ce que Dracula aurait attrapé Lucie si elle n'avait pas laissé tomber ses clés et si elle avait continué à marcher comme elle le faisait au début? Justifiez votre réponse à l'aide d'arguments mathématiques convaincants.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

La fenêtre de Matthieu[2]

Deux trains se déplacent à une vitesse constante.

1. D'après les clips vidéo *Train 1* et *Train 2*, calculez la vitesse de chaque train, en expliquant votre démarche. Exprimez les vitesses en cm/s.

2. Matthieu habite devant la voie ferrée. De sa fenêtre, il voit passer le train 1. Remplissez le tableau ci-dessous qui indique la distance parcourue par le train après être passé par le point M devant la fenêtre de Matthieu.

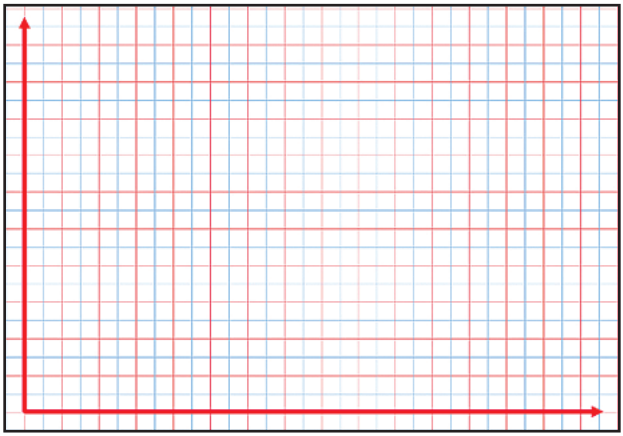
Train 1

***t* (s)**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
***d* (cm)**						

2 Note aux enseignantes et aux enseignants : Les clips dont il est question dans cette activité se trouvent sur le DVD d'accompagnement. Ils peuvent aussi être téléchargés dans la rubrique **Publications**, en cliquant sur **Processus d'abstraction en mathématiques**, à l'adresse suivante : www.laurentian.ca/educ/lradford.

Le train 1

3. En identifiant les axes et en utilisant un titre approprié, faites un graphique d'après le tableau précédent.

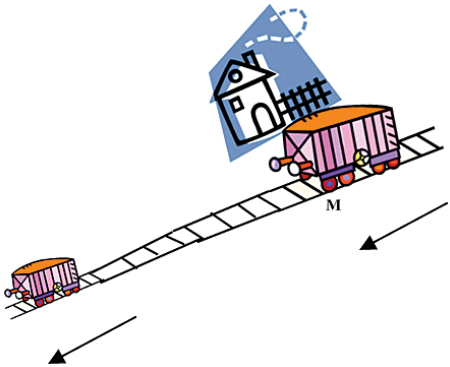


4. Trouvez une formule algébrique qui donne la distance d parcourue par le train 1, t secondes après être passé devant la fenêtre de Matthieu.

5. À quel moment le train 1 se trouve-t-il à 123,32 cm de M? Expliquez vos calculs.

Le train 2

6. Le train 2 est arrêté à 30 cm du point M. Quand le train 1 passe devant la fenêtre de Matthieu, le train 2 commence à rouler dans la même direction que le train 1.

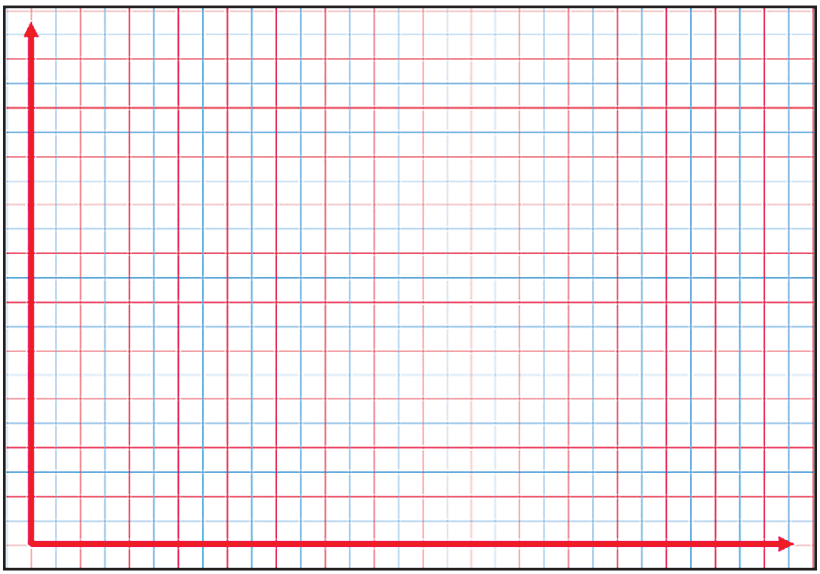


Remplissez le tableau ci-dessous qui indique la distance à laquelle se trouve le train 2 du point M.

Train 2

***t* (s)**	**0**	**1**	**2**	**3**
***d* (cm)**				

7. En identifiant les axes et en utilisant un titre approprié, faites un graphique d'après le tableau précédent.



8. Trouvez une formule algébrique qui donne la distance d à laquelle se trouve le train 2 du point M, t secondes après être passé devant la fenêtre de Matthieu.

9. À quel moment le train 2 se trouve-t-il à 63,97 cm de M?

10. À quel endroit le train 1 rattrape-t-il le train 2? Combien de temps cela lui prend-il? Expliquez votre raisonnement.

Le lendemain…

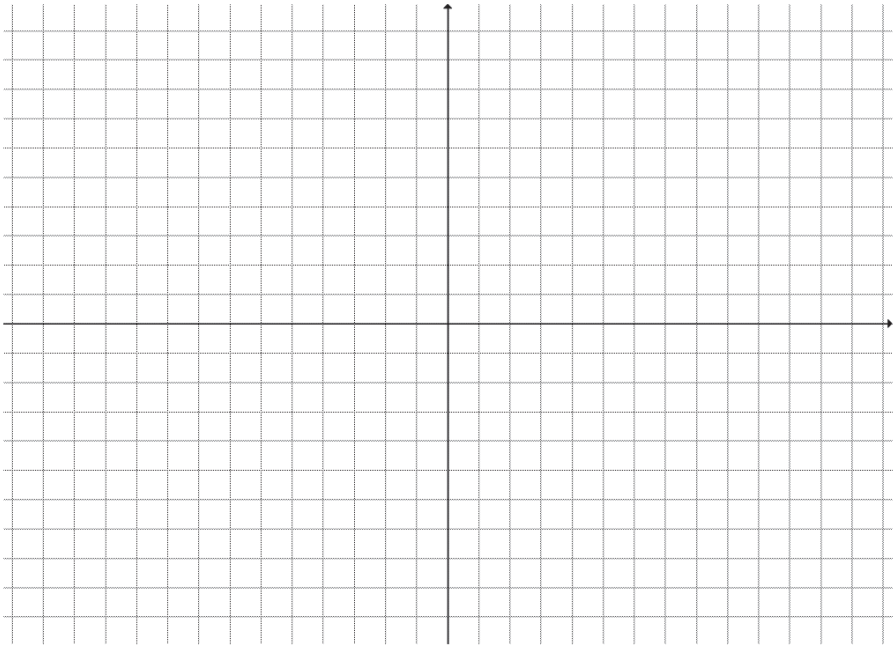
11. Matilde, la sœur de Matthieu, s'intéresse aussi aux déplacements de trains. « Demain matin, je me mets à l'œuvre » pense-t-elle.

    Le lendemain, elle se munit d'un chronomètre et, de la même fenêtre, attend patiemment l'arrivée des trains. Le train 2 arrive en premier. Quand celui-ci passe devant la fenêtre, Matilde actionne le chronomètre. Trois secondes plus tard, elle voit passer le train 1.

12. En supposant que la vitesse des trains est la même que celle calculée d'après les clips vidéo, remplissez le tableau ci-dessous qui indique la position (en cm) à laquelle se trouve chacun des trains par rapport au point M.

***t* (s)**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
p (cm) du train 2								
p (cm) du train 1								

    En identifiant les axes et en utilisant un titre approprié, faites un graphique pour chaque train d'après le tableau précédent.



13. Trouvez une formule algébrique qui donne la distance d à laquelle se trouve le train 2 du point M, t secondes après être passé devant la fenêtre.

14. Trouvez une formule algébrique qui donne la distance d à laquelle se trouve le train 1 du point M, t secondes après être passé devant la fenêtre.

15. À quel endroit le train 1 rattrape-t-il le train 2? Combien de temps cela lui prend-il? Expliquez votre raisonnement.

ANNEXE

Activités du chapitre 5

Les détectives et les suspects : un problème de modélisation mathématique

---

Une version électronique éditable des activités qui suivent se trouve dans le DVD d'accompagnement.

Rappel : permission accordée à l'enseignante ou à l'enseignant de reproduire ces documents pour utilisation en salle de classe ou pour des séances de formation, pourvu que la source et le nom des auteurs soient indiqués.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

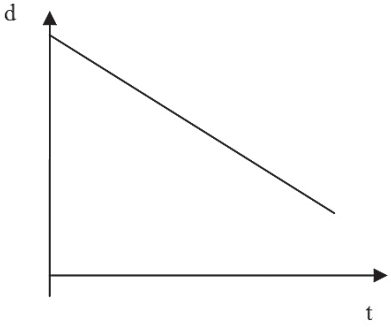
Introduction au CBR

1re journée

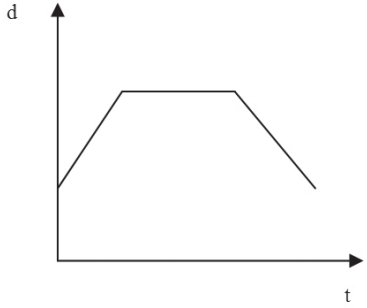
Problème 1

À tour de rôle, un élève est choisi pour être responsable du CBR, un autre est choisi pour être la cible du CBR. À l'aide de la calculatrice et du CBR, reproduisez chacun des graphiques suivants.

a)



b)



Expliquez le déplacement qui vous a permis de reproduire le graphique B.

_____

_____

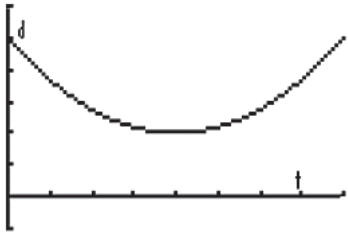
_____

_____

_____

_____

c)

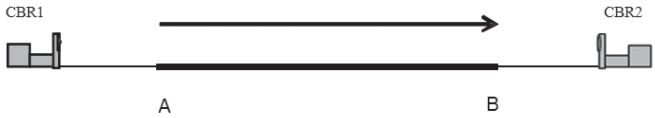


Expliquez le déplacement qui vous a permis de reproduire le graphique C.

Problème 2

Considérez la situation suivante :

Une auto, placée au point A, est activée en même temps que deux CBR, disposés selon le croquis ci-dessous.



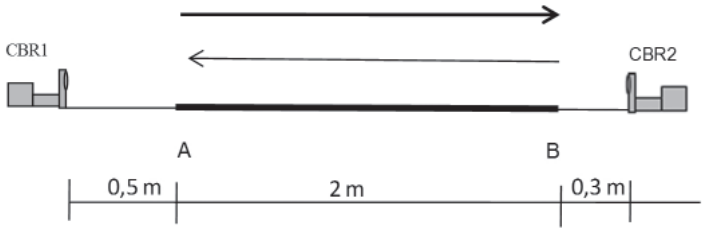
1. Prédisez l'allure du graphique qui sera produit à l'aide du CBR1 lorsque la voiture se dirige du point A au point B.	2. Prédisez l'allure du graphique qui sera produit à l'aide du CBR2 lorsque la voiture se dirige du point A au point B.
Graphique produit à l'aide du CBR1.	Graphique produit à l'aide du CBR2.

2. Que représente chacun des axes?

3. Pour chacun des graphiques, expliquez le sens de ses caractéristiques (sens des coordonnées du point initial et terminal, etc.).

Problème 3

Une auto se déplace en ligne droite et à une vitesse constante. Elle part du point A et se dirige au point B. Une fois arrivée au point B, l'auto reste immobile pendant 2 secondes et puis recule, toujours en ligne droite, jusqu'au point de départ A. Deux CBR sont placés aux extrémités du parcours et commencent à enregistrer le mouvement aussitôt que l'auto se met en marche.



1. Prédisez l'allure du graphique fourni par le CBR1.	2. Prédisez l'allure du graphique fourni par le CBR2.

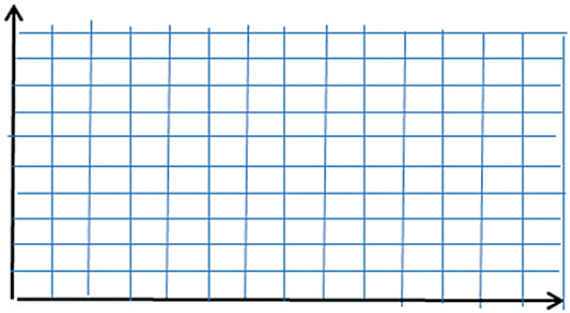
Problème 4

On fait l'expérience devant la classe.

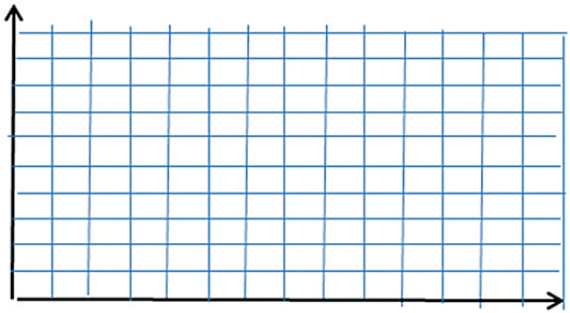
Discutez des similarités et des différences entre les graphiques produits par les CBR et vos prédictions.

Dessinez ci-dessous les graphiques si l'auto commence à se déplacer 2 secondes après que les CBR sont activés.

1. Graphique fourni par le CBR1 :



2 Graphique fourni par le CBR2 :



Expliquez :

Introduction au CBR.

Utilisation du CBR

Voici les étapes à suivre :

1. Branchez le CBR à la calculatrice éteinte.
2. Allumez la calculatrice.
3. Appuyez sur la touche **APPS**.
4. Dans le menu **Application**, choisissez **CBL/CBR**.
5. Appuyez sur **ENTER**.
6. Choisissez **3 : RANGER**.
7. Appuyez sur **ENTER**.
8. Dans le menu principal, choisissez **1 : SETUP/SAMPLE**.
9. Choisissez **Real time** (Temps réel) et, à l'aide du curseur, placez-vous sur la ligne supérieure de l'écran **Start now** (Démarrez maintenant).
10. Commencez l'expérience en appuyant sur la touche **ENTER**.
11. Si vous voulez répéter la prise de données, vous pouvez recommencer en appuyant sur **ENTER**, puis en choisissant l'option **3 : REPEAT SAMPLE**.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

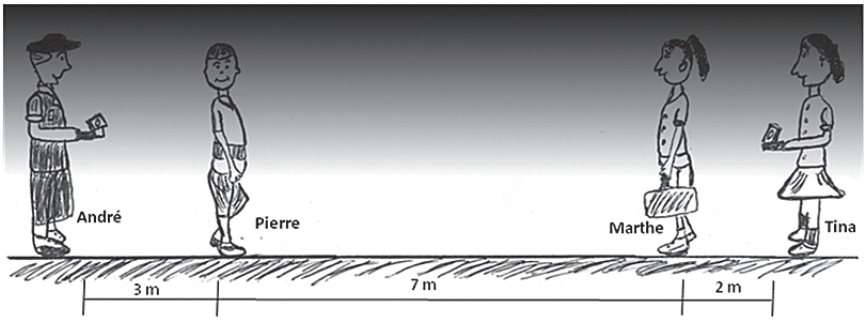
Les suspects et les détectives

2e journée

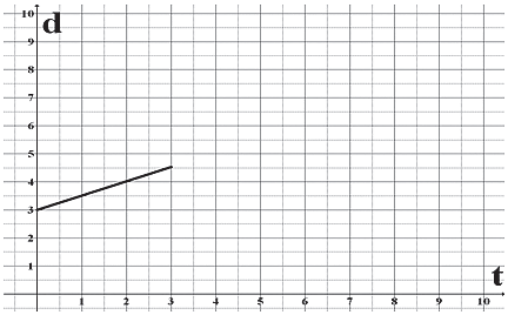
Problème

Depuis quelques jours, les détectives André et Tina surveillent deux suspects, Pierre et Marthe. Ils savent que Marthe va remettre à Pierre une information secrète contenue dans une enveloppe. Un jour qu'un brouillard dense s'est abattu sur la ville, les suspects en profitent pour mener à terme leur opération. Ils se trouvent à 7 m de distance.

Pour éviter de se faire remarquer, André et Tina décident de ne pas bouger. André est placé en arrière de Pierre, à 3 m de lui, et pointe un CBR dans la direction de Pierre. Tina est placée en arrière de Marthe, à 2 m d'elle, et pointe un CBR dans la direction de Marthe. Pierre et Marthe commencent à marcher en même temps, l'un vers l'autre, comme indiqué sur le dessin. Au moment où les suspects commencent à marcher, les détectives activent leur CBR. Ils veulent savoir où aura lieu exactement la remise de l'enveloppe.



De retour au poste de police, André montre le graphique et le tableau ci-dessous. Ces données correspondent au début du trajet de Pierre.



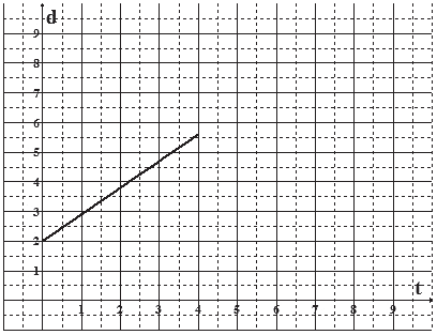
t (s)	d Pierre (m)
0	3,0
3,0	4,53

Graphique de déplacement de Pierre, d'après le CBR d'André.

1. Quels renseignements sur le déplacement de Pierre peut-on tirer de ce graphique? Expliquez.

2. Trouvez l'équation de ce graphique.

3. Tina montre à André le graphique et le tableau ci-dessous. Ces données correspondent au début du trajet de Marthe. Quels renseignements sur le déplacement de Marthe peut-on tirer de ce graphique? Expliquez.



t (s)	d Marthe (m)
0	2,0
4,0	5,6

Graphique de déplacement de Marthe, d'après le CBR de Tina.

Explication :

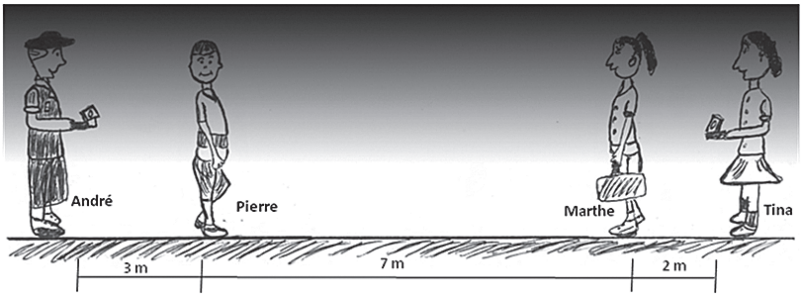
4. Trouvez l'équation de ce graphique.

5. Les détectives veulent savoir l'endroit et le moment précis où la remise de l'enveloppe secrète a eu lieu. Ils décident alors de mettre leur graphique ensemble (voir ci-dessous).

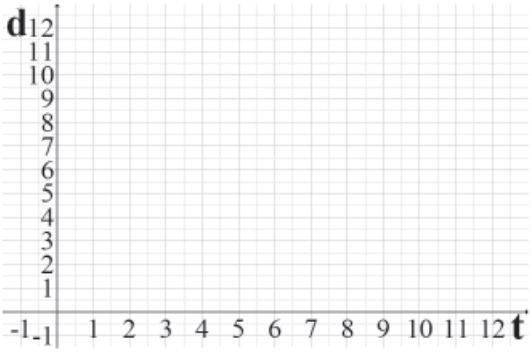
   Peut-on trouver, d'après ces graphiques, le moment et l'endroit où Pierre a reçu l'enveloppe? Justifiez votre réponse.

   Réponse et justification :

6. Indiquez le point en question sur le dessin suivant.



7. Peut-on trouver une autre méthode graphique pour déterminer l'endroit et le temps précis où la remise de l'enveloppe secrète a eu lieu? Expliquez.



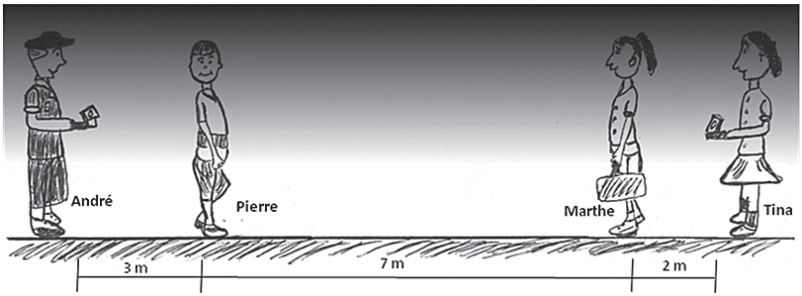
Explication :

8. Trouvez le moment et l'endroit précis où la remise de l'enveloppe secrète a eu lieu, en résolvant les équations des graphiques utilisés à la question 7.

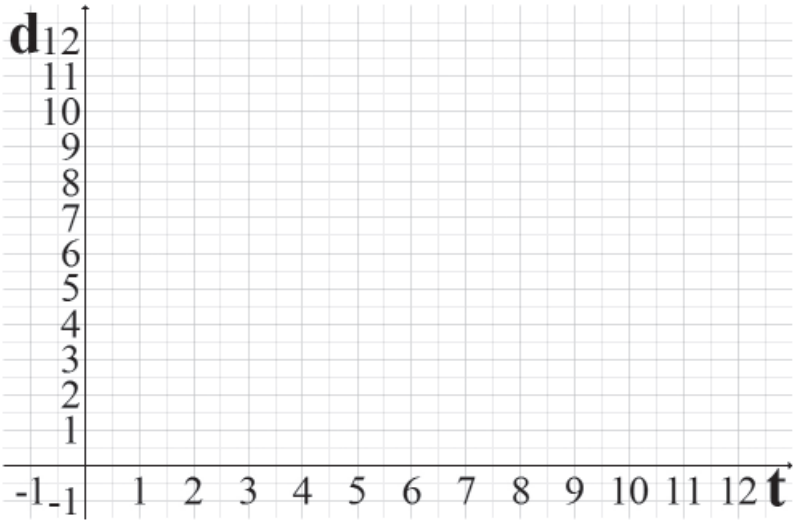
Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

DEVOIR



1. Trouvez une façon graphique de résoudre le problème de Tina et d'André en considérant les distances à partir de la position de Tina.



2. Trouvez le temps et l'endroit précis où la remise de l'enveloppe secrète a eu lieu, en résolvant les équations des graphiques utilisés à la question 1.

Nom des élèves : _____

Date : _____ Groupe : _____

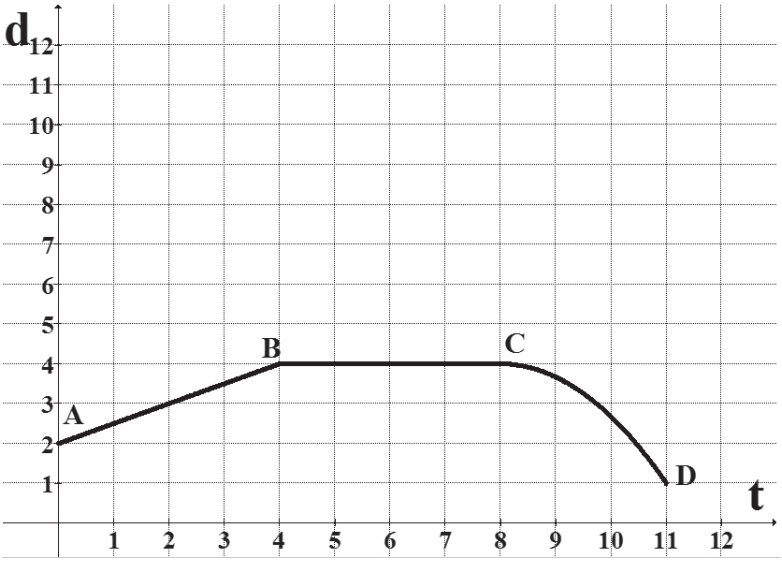
La marche de Pierre et Marthe

3e journée

Problème

Deux élèves, Pierre et Marthe, se placent à deux mètres l'un de l'autre. Ils commencent à marcher en ligne droite. Marthe, qui est en arrière de Pierre, porte une calculatrice branchée à un CBR. Le graphique obtenu est reproduit ci-après.

1. Décrivez comment ils ont pu faire pour obtenir un tel graphique.



2. Trouvez, d'après le graphique, la valeur de d quand $t = 2$. Que représente cette valeur de d dans le contexte du problème?

3. Trouvez l'équation du segment AB.

4. Trouvez l'équation du segment BC.

5. Dans le contexte du problème, que signifie la courbature du graphique entre C et D?

6. Vérifiez votre réponse à la question 1, à l'aide d'un CBR et d'une calculatrice. Est-ce que votre réponse était juste? Expliquez.

7. Votre réponse peut-elle être améliorée? Comment?

Nom des élèves : _____

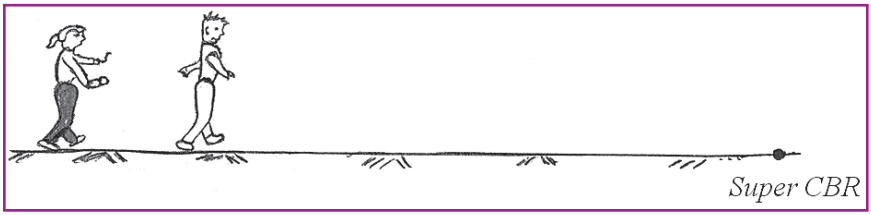
Date : _____ Groupe : _____

Un super-CBR!

4e journée

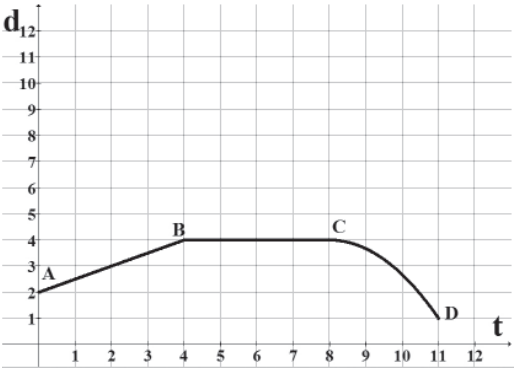
Problème

Comme dans le problème précédent, Pierre et Marthe se placent à deux mètres l'un de l'autre. Ils commencent à marcher en ligne droite. Marthe, qui est en arrière de Pierre, porte une calculatrice branchée à un CBR. Cette fois-ci, on a placé un Super-CBR devant Pierre (voir dessin ci-dessous). Le Super-CBR peut mesurer de longues distances.

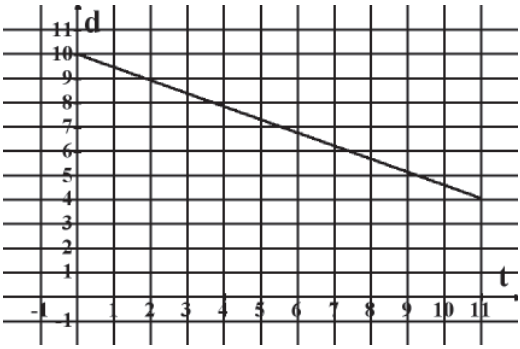


Les deux CBR sont activés au moment où Marthe et Pierre commencent à marcher.

Les graphiques obtenus par le CBR de Marthe et le Super-CBR sont reproduits ci-après.



Graphique de déplacement de Pierre, d'après le CBR d'André.



Déplacement de Pierre enregistré par le Super CBR.

1. Quels renseignements peut-on tirer au sujet du déplacement de Pierre d'après le graphique fourni par le Super-CBR.

2. Trouvez l'équation du graphique fourni par le Super-CBR.

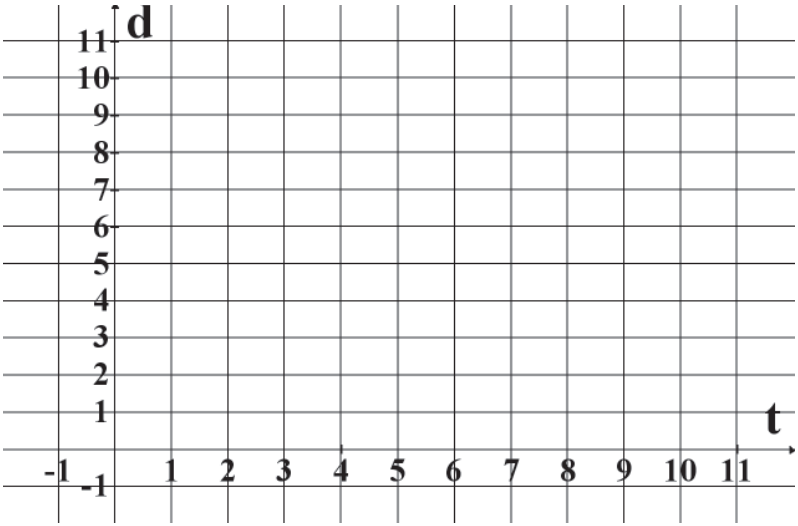
3. Calculez la distance entre Pierre et le Super-CBR quand $t = 2$ secondes et quand $t = 4$ secondes.

4. À quelle distance se trouve Marthe du Super-CBR quand $t = 2$ secondes et quand $t = 4$ secondes. Expliquez vos calculs.

5. Trouvez une équation qui donne la distance entre Marthe et le Super-CBR entre 0 et 4 secondes. Expliquez vos calculs.

6. Trouvez une équation qui donne la distance entre Marthe et le Super-CBR entre 4 et 8 secondes. Expliquez vos calculs.

7. Représentez ci-dessous le graphique de Marthe entre 0 et 8 secondes.



ANNEXE

Activités du chapitre 6

Des véhicules qui s'éloignent et des véhicules qui se rapprochent : le rôle des outils mathématiques dans la modélisation

---

Une version électronique éditable des activités qui suivent se trouve dans le DVD d'accompagnement.

Rappel : permission accordée à l'enseignante ou à l'enseignant de reproduire ces documents pour utilisation en salle de classe ou pour des séances de formation, pourvu que la source et le nom des auteurs soient indiqués.

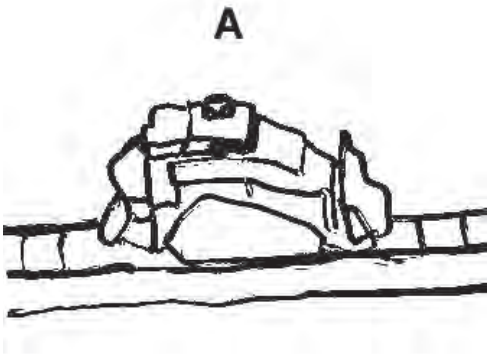
Nom des élèves : _____

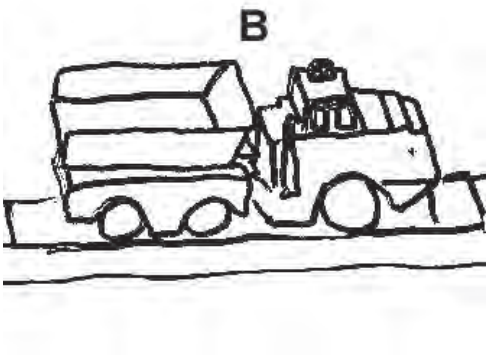
Date : _____ Groupe : _____

Les véhicules de Matthieu

Introduction : Prise de données[1]

Pour son anniversaire, Matthieu a reçu deux véhicules conçus pour rouler sur la voie ferrée. Le premier véhicule, c'est un bouteur ou *bulldozer* (véhicule A). L'autre, c'est un camion (véhicule B). En utilisant des chronomètres, calculez la vitesse des véhicules A et B, en cm/s, de façon aussi précise que possible. Expliquez votre démarche.

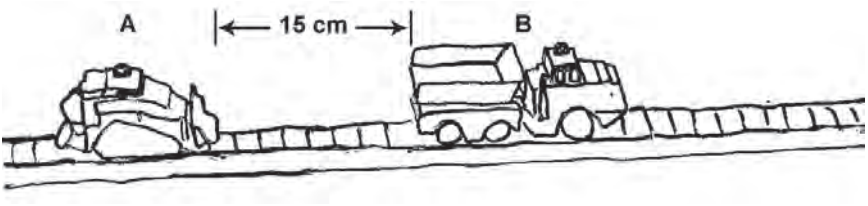




[1] L'enseignante ou l'enseignant mettra à la disposition des élèves les véhicules ainsi que les outils de mesure nécessaires pour mener à terme cette activité.

Problème 1

Matthieu place les véhicules A et B à 15 cm de distance (voir croquis ci-dessous). Les véhicules partent au même moment dans la même direction.



Matthieu veut modéliser le déplacement de chaque véhicule par un graphique. De plus, il veut dessiner les deux graphiques sur le même plan cartésien et être en mesure de trouver, d'après les graphiques :

a) la distance entre les véhicules 1,5 seconde après qu'ils sont en route;

b) la distance entre les véhicules à n'importe quel moment avant que le véhicule A rattrape le véhicule B;

c) l'endroit précis où le véhicule A rattrape le véhicule B.

1.1 Expliquez clairement ce que Matthieu devrait faire pour arriver à une telle modélisation.

1.2 En utilisant la feuille quadrillée ci-jointe, effectuez la modélisation. Identifiez convenablement les axes et les graphiques.

(La feuille quadrillée est à la page suivante.)

1.3 a) Si on prend un point quelconque sur chacun des graphiques, quelles informations chacun de ces points donne-t-il?

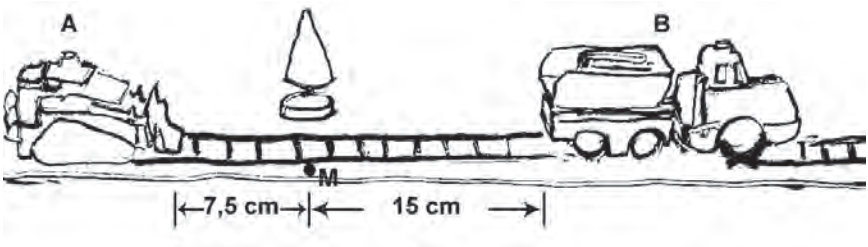
b) Quelle est la distance entre les véhicules 1,5 seconde après qu'ils sont en route?

c) Trouvez l'endroit précis où le véhicule A rattrape le véhicule B. Expliquez votre réponse.

d) Faites l'expérience à l'aide des véhicules pour vérifier votre réponse à la question c). Est-ce que le résultat de votre modélisation coïncide avec celui de l'expérience? Expliquez.

Problème 2

Cette fois-ci, Matthieu place un véhicule en avant du point M et l'autre véhicule après le point M sur la voie ferrée. Ce point marque l'emplacement d'un arbre (voir croquis). La partie avant du véhicule A se trouve stationnée à 7,5 cm d'un côté du point M. La partie arrière du véhicule B se trouve à 15 cm de l'autre côté du point M. Les deux véhicules partent en même temps.



2.1 La foire de tableaux!

a) Déterminez, à l'aide du tableau ci-dessous, la position de la partie arrière du véhicule B par rapport au point M en fonction du temps.

t **(s)**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
p **(cm)**										

b) Déterminez, à l'aide du tableau ci-dessous, la position de la partie avant du véhicule A par rapport au point M en fonction du temps.

t **(s)**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
p **(cm)**										

2.2 Des tableaux aux graphiques!

a) En dessinant un plan cartésien sur la feuille quadrillée ci-jointe, faites le **graphique** de la position de la partie arrière du véhicule B par rapport au point M en fonction du temps. Sur le même plan cartésien, faites également le **graphique** de la position de la partie avant du véhicule A par rapport au point M en fonction du temps.

(La feuille quadrillée est à la page suivante.)

b) D'après les graphiques, trouvez l'endroit où le véhicule A rattrape le véhicule B. Combien de temps cela lui prend-il? Expliquez votre raisonnement.

2.3 Et maintenant, place aux équations!

a) Trouvez l'équation du graphique du déplacement du véhicule A et l'équation du graphique du déplacement du véhicule B.

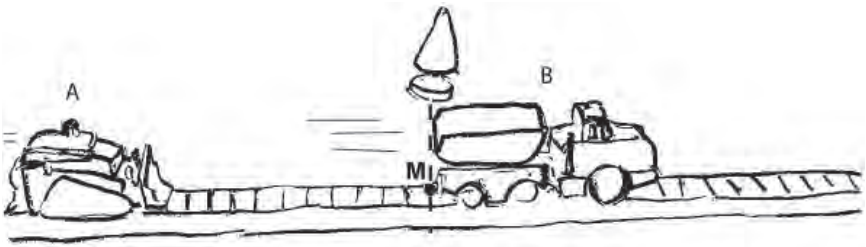
b) À l'aide de ces deux équations, trouvez le point où le véhicule A rattrape le véhicule B.

c) Est-ce que votre résultat coïncide avec celui obtenu graphiquement?

d) Quelle méthode préférez-vous pour résoudre ce problème, la méthode graphique ou la méthode des équations? Pourquoi?

Problème 3

Matilde, la sœur de Matthieu, s'intéresse aussi aux déplacements de véhicules. Les deux décident de jouer ensemble. Matthieu fait démarrer les véhicules et Matilde, munie d'un chronomètre, attend patiemment le moment où les véhicules passeront par le point M. Le véhicule B arrive en premier. Au moment exact où celui-ci termine son passage par le point M (voir croquis), Matilde actionne le chronomètre. Deux secondes plus tard, le devant du véhicule A passe par le point M.



3.1 Remplissez le tableau ci-dessous. La première rangée correspond au temps écoulé depuis que Matilde a actionné le chronomètre. La deuxième rangée indique la position de la partie arrière du véhicule B par rapport au point M. La troisième rangée indique la position de la partie avant du véhicule A par rapport au point M.

t **(s)**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
p **(cm) véhicule B**											
p **(cm) véhicule A**											

3.2 En utilisant la feuille quadrillée ci-jointe, à l'aide du tableau, faites un graphique qui donne la position de la partie avant du véhicule A en fonction du temps.

Sur le même plan cartésien, faites aussi un graphique qui donne la position de la partie arrière du véhicule B en fonction du temps. Identifiez clairement les axes et les graphiques.

(La feuille quadrillée est à la page suivante.)

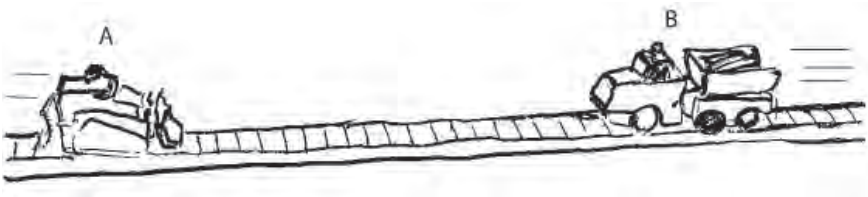
3.3 À quel endroit le véhicule A rattrape-t-il le véhicule B?

3.4 Combien de temps cela lui prend-il? Expliquez votre raisonnement.

3.5 Trouvez, cette fois-ci à l'aide du tableau, le point où le véhicule A rattrape le véhicule B. Est-ce que votre résultat coïncide avec celui trouvé à l'aide des graphiques? Commentez.

Problème 4

Matthieu et Matilde font démarrer en même temps les véhicules A et B en direction opposée. Au départ, les véhicules sont à 100 cm de distance (voir croquis).



Matthieu veut modéliser le déplacement de chaque véhicule par un graphique. De plus, il veut dessiner les deux graphiques **sur le même plan cartésien** et être en mesure de trouver, d'après les graphiques :

a) la distance entre les véhicules 1,5 seconde après qu'ils sont en route;

b) la distance entre les véhicules à n'importe quel moment avant la rencontre des véhicules;

c) l'endroit précis où les véhicules se rencontrent.

4.1 Expliquez clairement ce que Matthieu devrait faire pour arriver à une telle modélisation.

4.2 En utilisant la feuille quadrillée ci-jointe, effectuez la modélisation. Identifiez convenablement les axes et les graphiques.

(*La feuille quadrillée est à la page suivante.*)

4.3 D'après vos graphiques :

a) Quelle est la distance entre les véhicules 1,5 seconde après qu'ils sont en route?

b) Trouvez l'endroit précis où les véhicules se rencontrent.

4.4 Trouvez une équation du graphique du véhicule A et une équation du graphique du véhicule B.

4.5 À l'aide des équations, trouvez le point de rencontre des véhicules.

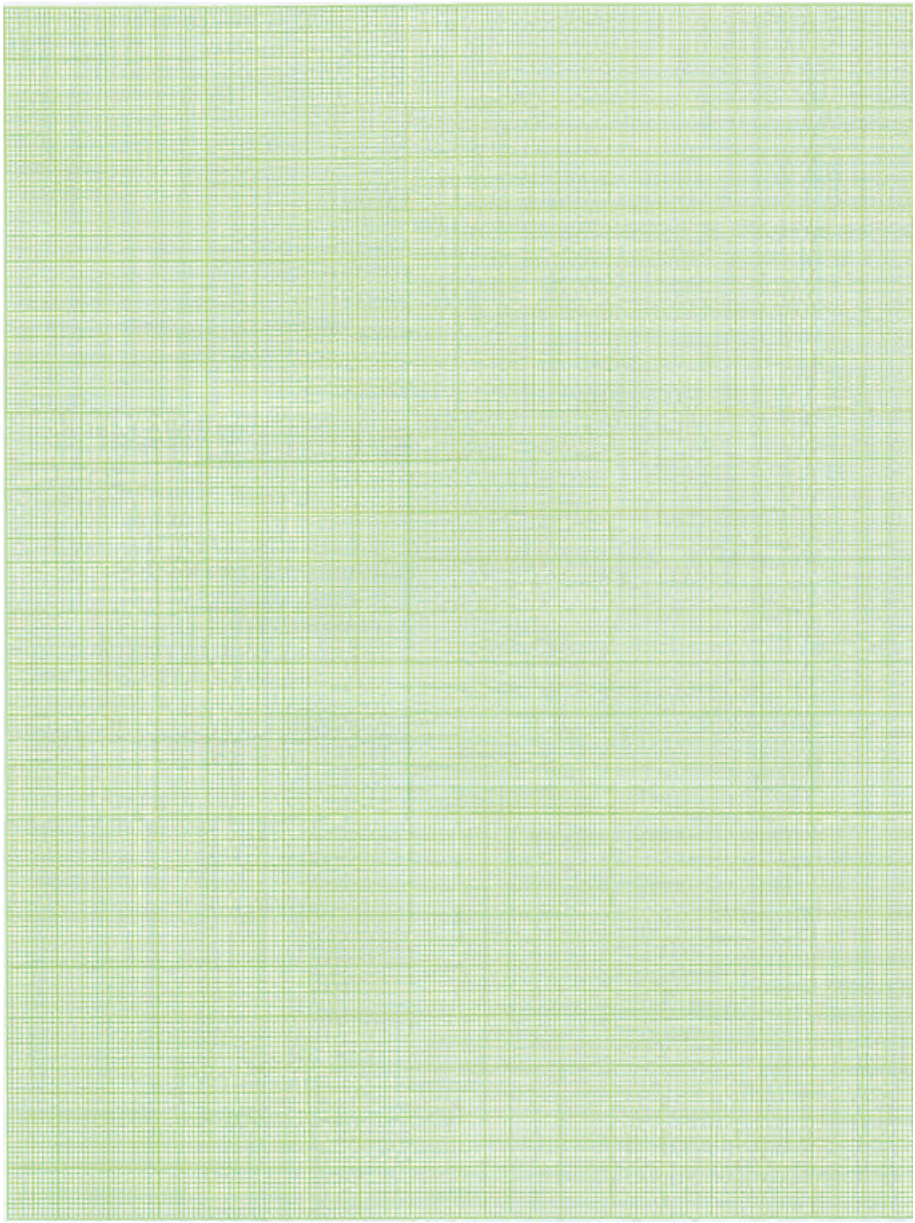
4.6 Est-ce que votre résultat coïncide avec celui obtenu à l'aide des graphiques? Commentez.

4.7 Faites l'expérience à l'aide des véhicules pour vérifier votre réponse à la question 4.5. Est-ce que le résultat de votre modélisation coïncide avec celui de l'expérience? Expliquez.

Problème 5

Comme dans le problème précédent, Matthieu et Matilde font démarrer en même temps les véhicules en direction opposée. Sachant que les véhicules se trouvaient à 100 cm de distance, mais que le véhicule B s'est arrêté pendant 1 seconde après avoir été en mouvement 2 secondes, trouvez, à l'aide des graphiques, leur point de rencontre. Expliquez votre raisonnement.

(La feuille quadrillée est à la page suivante.)



Achevé d'imprimer en septembre 2009
sur les presses du
Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques

Processus d'abstraction en mathématiques

Le livre *Processus d'abstraction en mathématiques* est le résultat d'une recherche action menée avec des enseignantes et enseignants de classes de la 7e à la 10e année. Le livre est destiné aux enseignantes et enseignants, aux conseillères et conseillers pédagogiques ainsi qu'aux professeurs universitaires qui travaillent dans les programmes de formation initiale à l'enseignement. Le livre s'inspire des recherches récentes dans le domaine de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ainsi que de recherches en psychologie et neurosciences. En s'inscrivant dans une perspective socioculturelle de l'apprentissage et de l'enseignement, inspirée des travaux de Lev Vygotski, le livre offre, dans le premier chapitre, une analyse conceptuelle des éléments qui sous-tendent les processus d'abstraction en mathématiques. Dans les chapitres suivants, les auteurs présentent quelques caractéristiques clés des situations d'apprentissage visant à faciliter l'engagement des élèves dans les processus d'abstraction. Ces caractéristiques sont par la suite montrées, de façon concrète, à l'aide d'exemples de salle de classe. Les exemples permettent de voir le cheminement conceptuel de l'élève, le rôle de l'interaction sociale, du langage et des artefacts. Non moins importants, les exemples montrent le rôle fondamental que jouent l'enseignante et l'enseignant dans les processus d'abstraction des élèves.

MAT-558
ISBN 978-1-4435-0683-0
9 781443 506830